



Estimation du mouvement apparent par des fonctions splines vectorielles : application à l'océanographie et à la météorologie

Till Isambert

► To cite this version:

Till Isambert. Estimation du mouvement apparent par des fonctions splines vectorielles : application à l'océanographie et à la météorologie. Modélisation et simulation. Université Paris Descartes, 2007. Français. NNT : . tel-01301974

HAL Id: tel-01301974

<https://inria.hal.science/tel-01301974>

Submitted on 13 Apr 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

UFR de Mathématiques et Informatique

École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

présentée par

Till Isambert

ESTIMATION DU MOUVEMENT APPARENT PAR DES FONCTIONS SPLINES VECTORIELLES : APPLICATION À L'OCÉANOGRAPHIE ET À LA MÉTÉOROLOGIE

Soutenue publiquement le 7 Septembre 2007, devant le jury composé de :

Rapporteurs **Etienne Mémin**
 Jean Ponce

Examineurs **François-Xavier Le Dimet**
 Christine Graffigne
 Isabelle Herlin

Remerciements

Je tiens à remercier en tout premier lieu Isabelle Herlin, responsable de l'équipe CLIME à l'INRIA, sans qui cette thèse n'aurait pas été possible. Je lui exprime très sincèrement ma gratitude pour la confiance qu'elle m'a accordée. Cette thèse a pu se dérouler dans des conditions optimales grâce à sa disponibilité et à son encadrement. Je la remercie également pour toutes ses relectures qui ont fait la qualité de ce manuscrit.

Un grand merci à Jean-Paul Berroir, avec qui j'ai pu régulièrement discuter de mon travail de thèse, dans la continuité de mon stage de D.E.A. Tout au long de mon doctorat, il a su orienter mes recherches aux bons moments et s'est beaucoup investi dans la lecture de ce document.

Etienne Huot, de tout temps, m'a considérablement aidé à la compréhension de moult problèmes liés ou non à mon sujet de thèse, et ce même lorsqu'il n'avait pas de disponibilité. Ses conseils de dernière minute m'ont bien aidé pour la soutenance. Plus généralement, je le remercie pour sa collaboration à mon travail, durant son année de délégation au sein du projet CLIME.

Dominique Béréziat m'a fourni de nombreux scripts et programmes de visualisations très utiles pour la rédaction de mon manuscrit de thèse et la présentation de mes résultats ; je lui en suis très reconnaissant. Il a toujours pris le temps de m'aider lorsque j'avais une difficulté de programmation ou de compréhension. Merci de son aide pour l'organisation d'une pré-soutenance au LIP6, qui m'a facilité la soutenance finale.

Je remercie Hussein Yahia, chercheur, qui m'a également encadré au tout début de ma thèse et m'a fourni beaucoup de conseils avisés et d'indications importantes pour mon travail de recherche.

Je remercie vivement les deux rapporteurs pour l'attribution des bourses de thèse INRIA, Evelyne Lutton et Patrick Joly, qui ont su se rendre très disponibles et ont grandement facilité la mise en place d'entretien pour discuter de l'avancement de mon travail.

Je suis très sensible à la présence d'Etienne Mémin dans mon jury de thèse, comme rapporteur. Je tiens à le remercier très sincèrement pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail pendant toute la durée de ma thèse, et notamment de m'avoir invité dans le projet VISTA afin de discuter de mon activité de recherche. Je le remercie pour toutes ses questions et remarques lors de la soutenance, qui sont autant de pistes à explorer.

Je remercie beaucoup Jean Ponce, qui a accepté d'être rapporteur de mon jury de thèse, et qui a lu ce manuscrit avec beaucoup d'attention, ses nombreuses questions très pertinentes

m'ont aidées pour la présentation de mon travail de thèse. Je le remercie également pour les contacts professionnels qu'il m'a fournis à l'issue de ma thèse.

Je remercie François-Xavier Le Dimet, qui m'a fait l'honneur d'être le président de mon jury de thèse, et pour ses remarques constructives.

Je remercie chaleureusement Christine Graffigne, qui a officiellement dirigé cette thèse. Elle a suivi mon travail avec beaucoup d'attention et a toujours été disponible pour discuter de mon travail, a de nombreuses reprises. Ses conseils m'ont été très précieux et je la remercie pour son aide en fin de thèse. Elle a énormément facilité les processus administratifs de dernière minute pour l'organisation de la soutenance de thèse.

Je remercie Vivien Mallet, qui m'a écouté la veille du discours de thèse et donné de très nombreux conseils pertinents, et critiques constructives pour la soutenance. Je le remercie beaucoup pour l'intérêt qu'il a porté à la présentation de mon travail.

Je remercie Nicolas Papadakis, Patrick Héas et Anne Cuzol, du projet VISTA, qui m'ont chaleureusement accueillis lors de ma visite à l'IRISA Rennes.

Je remercie Yann Dumortier, doctorant dans le projet IMARA, qui a très sympathiquement accepté de m'écouter faire une répétition de soutenance de thèse, et a montré beaucoup d'intérêt pour mon travail. Bonne chance pour la suite !

Merci beaucoup à Christine Anocq pour sa disponibilité, sa gentillesse, et toute l'aide administrative qu'elle m'a apportée durant mon séjour à l'INRIA.

Je tiens à remercier toutes les autres personnes qui ont effectuées un séjour au sein du projet CLIME, et plus généralement à l'INRIA, et que j'ai côtoyées. Tous les stagiaires et doctorants, pour la bonne humeur qu'ils ont apporté au projet, en particulier Jacopo, Aymeric, Baptiste, Christophe, Anne, Michel, Alexandre, Hervé, Vincent, Zulfukar, Yan, Lin, Meryem, Christian, Inés, Carlos, Christian, Nicolas, Amel et Rémi.

Je voudrais également souligner l'influence positive des toutes les personnes que j'ai régulièrement croisées durant toutes ces années, en particulier Virgile, Philippe, Ivan et Ludo. Je pense également à Etienne, qui a effectué sa thèse à Tokyo au même moment que moi, et dont nos (trop) nombreuses discussions métaphysiques, par e-mails interposés, m'ont donné le moral nécessaire pour aller jusqu'au bout de cette expérience.

Je remercie grandement ma famille pour m'avoir soutenu toutes ces années. Un immense merci à mes parents qui ont organisé le pot de soutenance et m'ont toujours donné des conseils décisifs dans les moments de doute. Merci également à ma sœur, pour son soutien et surtout pour avoir un frère aussi génial et néanmoins toujours disponible.

Enfin, je tiens à remercier Mélanie qui a supporté mes interrogations de dernière année de thèse, mon absolue ponctualité et mon sens inné de l'organisation. Merci de m'avoir épaulé et rassuré durant cette année.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Résumé | 7 |
| Notations | 9 |
| 1 Introduction générale | 11 |
| 1.1 Contexte | 11 |
| 1.2 Contributions apportées | 13 |
| 1.3 Organisation du document | 14 |
| 2 Mécanique des fluides : circulation océanographique et atmosphérique | 15 |
| 2.1 Introduction | 15 |
| 2.2 Hydrostatique | 16 |
| 2.2.1 Définition d'un fluide | 16 |
| 2.2.2 Masse volumique et densité d'un fluide | 16 |
| 2.2.3 Pression dans un fluide | 17 |
| 2.2.4 Équations d'état de l'océan et de l'atmosphère | 17 |
| 2.3 Hydrodynamique | 18 |
| 2.3.1 Formalismes d'Euler et Lagrange | 18 |
| 2.3.1.1 Formalisme de Lagrange | 18 |
| 2.3.1.2 Formalisme d'Euler | 18 |
| 2.3.1.3 Équivalence des formalismes d'Euler et de Lagrange | 18 |
| 2.3.1.4 Comparaison des deux descriptions | 19 |
| 2.3.2 Dérivée particulaire | 19 |
| 2.3.3 Viscosité dynamique et viscosité cinématique | 19 |
| 2.3.4 Description d'un champ de vecteurs | 20 |
| 2.3.4.1 Divergence | 20 |
| 2.3.4.2 Rotationnel et vorticité | 21 |
| 2.3.4.3 Lignes de courant | 21 |
| 2.4 Équations générales de la mécanique des fluides | 22 |
| 2.4.1 Conservation de la masse | 22 |
| 2.4.1.1 Conservation d'une quantité scalaire | 23 |
| 2.4.2 Equation d'advection-diffusion | 23 |
| 2.4.3 Equation du mouvement | 24 |
| 2.4.4 Equation de l'énergie interne | 25 |
| 2.4.5 Les équations de Navier-Stokes | 26 |
| 2.5 La turbulence | 27 |
| 2.5.1 Description qualitative | 27 |
| 2.5.2 Caractérisation des écoulements : Nombre de Reynolds | 27 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.6 | Conclusion | 28 |
| 3 | Télédétection en océanographie et météorologie | 29 |
| 3.1 | Introduction | 29 |
| 3.2 | Capteurs satellite | 29 |
| 3.2.1 | Spectre de rayonnement électromagnétique | 30 |
| 3.2.2 | Capteurs passifs | 32 |
| 3.2.3 | Capteurs actifs | 34 |
| 3.2.3.1 | Hyperfréquences actives | 34 |
| 3.2.3.2 | LIDAR | 35 |
| 3.3 | Océanographie | 35 |
| 3.3.1 | Température de Surface | 36 |
| 3.3.1.1 | Acquisition par capteur passif infrarouge thermique | 36 |
| 3.3.1.2 | Acquisition par un capteur passif d'hyperfréquence | 40 |
| 3.3.2 | Couleur de l'océan | 40 |
| 3.3.3 | Niveau de l'océan | 40 |
| 3.3.4 | Applications | 43 |
| 3.4 | Observation météorologique | 43 |
| 3.4.1 | Capteur Météosat de première génération | 44 |
| 3.4.1.1 | Le canal visible | 45 |
| 3.4.1.2 | Le canal «Infrarouge Thermique» | 45 |
| 3.4.1.3 | Le canal «vapeur d'eau» | 47 |
| 3.4.2 | Capteur Météosat de seconde génération | 48 |
| 3.4.3 | Applications | 50 |
| 3.5 | Conclusion | 50 |
| 4 | Estimation du mouvement apparent | 53 |
| 4.1 | Introduction | 53 |
| 4.2 | Modélisation du mouvement apparent | 54 |
| 4.2.1 | Hypothèse fondatrice | 54 |
| 4.2.2 | Problème d'ouverture et champ homogène | 54 |
| 4.2.3 | Autres hypothèses de conservation | 55 |
| 4.3 | Principales approches d'estimation du mouvement apparent | 57 |
| 4.3.1 | Estimation par mise en correspondance | 57 |
| 4.3.2 | Estimation par régularisation globale du champ de mouvement | 58 |
| 4.3.2.1 | Formulation variationnelle | 58 |
| 4.3.2.2 | Autres types de régularisation | 59 |
| 4.3.3 | Méthodes fréquentielles | 60 |
| 4.3.3.1 | Méthodes basées sur l'énergie | 60 |
| 4.3.3.2 | Méthodes basées sur la phase | 60 |
| 4.3.4 | Estimation paramétrique | 61 |
| 4.3.5 | Estimation suivant une base de splines | 62 |
| 4.4 | Approche multi-échelles | 63 |
| 4.5 | Conclusion | 64 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5 | Interpolation et approximation | 65 |
| 5.1 | Introduction | 65 |
| 5.2 | Techniques d'interpolation | 65 |
| 5.2.1 | Interpolation de Lagrange | 66 |
| 5.2.2 | Interpolation suivant une base de polynômes fixe | 66 |
| 5.2.3 | Interpolation par des fonctions splines | 67 |
| 5.2.4 | Approximation quadratique | 67 |
| 5.3 | Interpolation et approximation par des FBR | 68 |
| 5.3.1 | Problème général | 69 |
| 5.3.2 | Calcul des coefficients de la solution | 69 |
| 5.3.3 | Existence et unicité de la solution | 70 |
| 5.3.4 | Principales FBR | 71 |
| 5.3.5 | FBR à support compact | 71 |
| 5.3.6 | Splines polyharmoniques | 71 |
| 5.3.6.1 | Interpolation vérifiant la contrainte DR2O (Div-Rot du Second Ordre) | 72 |
| 5.3.7 | Quasi-interpolation | 74 |
| 5.3.8 | Interpolation de données projetées | 76 |
| 5.4 | Réduction de la complexité | 79 |
| 5.4.1 | Méthodes multipôles | 79 |
| 5.4.2 | Partition de l'unité | 80 |
| 5.4.3 | Méthodes multi-échelles avec des FBR à support compact | 81 |
| 5.5 | Conclusion | 83 |
| 6 | Modèle d'estimation du mouvement fluide par spline vectorielle : implémentation par partition de l'unité | 85 |
| 6.1 | Introduction | 85 |
| 6.2 | Estimation du mouvement fluide par spline vectorielle | 86 |
| 6.2.1 | Estimation du mouvement fluide 2D | 86 |
| 6.2.2 | Estimation du mouvement fluide compressible ou incompressible 3D | 87 |
| 6.3 | Implémentation du modèle | 90 |
| 6.3.1 | Constat sur l'information «image» exploitable | 90 |
| 6.3.2 | Décomposition spatiale du domaine image | 91 |
| 6.4 | Partition de l'unité | 92 |
| 6.5 | Conclusion | 92 |
| 7 | Estimation et représentation multi-échelles du champ de mouvement | 93 |
| 7.1 | Introduction | 93 |
| 7.2 | Algorithme de décimation | 94 |
| 7.2.1 | Triangulation de Delaunay et diagramme de Voronoï | 96 |
| 7.2.2 | Implémentation de l'algorithme de décimation | 98 |
| 7.3 | Estimation multi-échelles du mouvement avec algorithme de décimation | 100 |
| 7.3.1 | Estimation du mouvement à une échelle donnée | 102 |
| 7.3.2 | Calcul de l'échelle | 105 |
| 7.4 | Représentation multi-échelles d'un champ de vecteurs | 106 |
| 7.5 | Limitations du modèle AMSV | 106 |
| 7.6 | Conclusion | 108 |

| | | |
|-------------------------------|---|------------|
| 8 | Modèle d'estimation multi-échelles du mouvement fluide | 109 |
| 8.1 | Introduction | 109 |
| 8.2 | Modèle GFME | 110 |
| 8.3 | Calcul des coefficients de la solution | 111 |
| 8.3.1 | Cas des fluides incompressibles 2D | 111 |
| 8.3.2 | Cas des fluides compressibles ou incompressibles 3D | 114 |
| 8.4 | Résolution numérique du système | 115 |
| 8.4.1 | Amélioration de la convergence | 116 |
| 8.5 | Estimation multi-échelles du mouvement | 116 |
| 8.6 | Conclusion | 118 |
| 9 | Validation et analyse des résultats | 121 |
| 9.1 | Estimation du mouvement sur des données synthétiques | 121 |
| 9.1.1 | Présentation du modèle de circulation océanographique OPA | 121 |
| 9.1.2 | Données exploitées | 121 |
| 9.1.3 | Intérêt | 123 |
| 9.1.4 | Stratégie de sélection des points de contrôle sur des données océano- graphiques | 125 |
| 9.1.5 | Critères d'erreurs quantitatifs | 127 |
| 9.1.6 | Résultats des modèles | 129 |
| 9.1.6.1 | Résultats du modèle PUSP | 134 |
| 9.1.6.2 | Résultats du modèle AMSV | 134 |
| 9.1.6.3 | Méthode de représentation multi-échelles d'un champ de vec- teurs | 137 |
| 9.1.6.4 | Résultats du modèle GFME | 139 |
| 9.2 | Estimation du mouvement sur les images satellite | 139 |
| 9.2.0.5 | Résultats du modèle PUSP | 142 |
| 9.2.0.6 | Résultats du modèle GFME | 142 |
| 9.3 | Conclusion | 144 |
| 10 | Conclusion | 149 |
| 10.1 | Travaux effectués | 150 |
| 10.2 | Perspectives | 151 |
| 10.2.1 | Améliorations «numériques» possibles des modèles présentés | 151 |
| 10.2.2 | Autres améliorations possibles | 152 |
| Annexes | | 155 |
| A.1 | Fonctions polyharmoniques : calcul d'une solution fondamentale | 155 |
| A.2 | Expression formelle du quasi-interpolant vectoriel vérifiant la contrainte de ré- gularité DR2O | 155 |
| Liste des publications | | 159 |

Résumé

Cette thèse étudie le problème de l'estimation du mouvement apparent sur des images satellite, pour des applications en océanographie et en météorologie. Les mouvements observés sont ceux de fluides géophysiques sur des séquences temporelles : courants à la surface de l'océan et vents dans l'atmosphère. Les méthodes classiques d'estimation du mouvement apparent en vision par ordinateur ne sont pas adaptées à ce type de données, car elles sont principalement dédiées aux mouvements rigides : elles ne prennent en compte ni les déformations des fluides, ni la nature compressible ou incompressible de ceux-ci, ni leur comportement turbulent. De fait, le comportement des fluides devient turbulent dans des situations spécifiques telles que cyclone, forte pluie, orage, caractérisées par un écoulement rapide. Dans ce cas apparaissent des structures tourbillonnaires de tailles et durées variées.

Nous présentons, dans cette étude, plusieurs modèles d'estimation du mouvement fluide dans le cadre méthodologique des splines vectorielles. Nous optons pour cette approche théorique car elle permet d'estimer le mouvement dans les zones de l'image où l'équation modélisant le transport, appelée équation de conservation, est valide, et de l'approximer selon une propriété de régularité choisie sur le reste du domaine image. Ceci est en opposition avec les modèles classiques d'estimation du mouvement apparent, résolvant en tout point de l'image l'équation de transport, même quand elle n'est pas vérifiée, en faisant un compromis avec la contrainte de régularité.

Le premier modèle, présenté dans cette thèse, étend un modèle existant adapté aux fluides incompressibles et utilisant l'équation de conservation de la luminance et la contrainte de régularité Div-Rot du second ordre. Nous proposons un modèle qui traite le cas des fluides compressibles, en utilisant l'équation de conservation de la masse, et qui apporte une amélioration numérique pour l'estimation du mouvement à partir d'un très grand nombre de points de contrôle.

Les autres modèles proposés permettent une estimation multi-échelles du mouvement, afin de prendre en compte la turbulence dans les images.

Le deuxième modèle se base sur une représentation multi-échelles des points de contrôle. Cette représentation est obtenue en générant des sous-ensembles de l'ensemble original des points de contrôle, à l'aide d'un algorithme de décimation utilisant un critère géométrique. Ces sous-ensembles sont de densité décroissante, par rapport à l'ensemble original, et correspondent chacun à une échelle spatiale d'analyse. A chaque échelle, le mouvement est estimé par une spline vectorielle, vérifiant l'équation de conservation de la luminance et minimisant approximativement la contrainte de régularité Div-Rot du second ordre.

Nous proposons enfin un troisième modèle, pour l'estimation multi-échelles du mouvement à l'aide d'une représentation par pyramide gaussienne des images. Chaque niveau de la pyramide correspond à une échelle spatiale d'analyse. Le mouvement est d'abord calculé à l'échelle la plus grossière, puis les incréments permettant de calculer le mouvement à une échelle, en fonction de celle immédiatement inférieure, sont calculés. L'estimation du mouvement se base sur

une spline vectorielle, vérifiant l'équation de conservation de la luminance ou de la masse, et réalisant le minimum de la contrainte Div-Rot du second ordre parmi une classe de fonctions de base adaptée à l'échelle d'analyse.

En fin de manuscrit, nous faisons une analyse quantitative et qualitative des champs estimés par les modèles proposés. Les résultats montrent qu'ils conviennent mieux à l'estimation du mouvement fluide que les méthodes classiques existantes. Les tourbillons, les zones de divergence et le mouvement laminaire sont correctement restitués.

Les applications potentielles des modèles sont multiples : les champs de vitesse estimés constituent des observations des vents en météorologie, des courants en océanographie, variables d'état des modèles de prévision. Les estimations réalisées peuvent donc être utilisées pour améliorer la prévision : soit comme condition initiale, soit par des techniques d'assimilation de données.

Notations

Principaux acronymes et abréviations

- ECL** : Equation de Conservation de la Luminance.
- AMSV** : Approximation Multi-échelles et Splines Vectorielles.
- ECM** : Equation de Conservation de la Masse.
- FBR** : Fonction(s) de Base Radiale.
- PUSP** : Partition de l'Unité et Splines Vectorielles.
- GFME** : Geophysical Fluid Motion Estimation.

Symboles mathématiques - Symboles courants

\mathcal{L}^2 ou $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$: L'espace des fonctions de carré intégrable sur \mathbb{R}^2 .

$\mathcal{E}'(\Omega)$: L'ensemble des distributions à support compact contenu dans Ω .

\mathcal{D} ou $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$: L'espace des fonctions de \mathbb{R}^2 infiniment dérivables à support compact.

\mathcal{D}' ou $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$: L'espace des distributions sur \mathbb{R}^2 .

\mathcal{P}_m : L'espace des polynômes de \mathbb{R}^2 de degré inférieur ou égal à m .

$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{N}^2$: Multi-indice.

$D^\gamma = \partial_x^{\gamma_1} \partial_y^{\gamma_2}$: Dérivée partielle.

V^2 : L'espace de Beppo-Levi d'ordre 2 :

$$V^2 = \{\mathbf{w} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) \text{ tel que } D^\gamma \mathbf{w} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2), |\gamma| = 2\}.$$

\mathcal{V}^2 : L'espace de Beppo-Levi vectoriel d'ordre 2 :

$$\mathcal{V}^2 = V^2 \times V^2.$$

I : Une image.

∇ : Un gradient, tel que le gradient d'une image ∇I .

$\mathbf{w} = (u, v)^T$: Un champ de vecteurs bidimensionnel.

div : L'opérateur divergence, tel que la divergence d'un champ de vecteurs en deux dimensions :

$$\text{div } \mathbf{w} = u_x + v_y.$$

rot : L'opérateur rotationnel, tel que le rotationnel d'un champ de vecteurs en deux dimensions :

$$\text{rot } \mathbf{w} = v_x - u_y.$$

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Contexte

L'étude de la dynamique Océan-Atmosphère repose sur la connaissance des courants maritimes, du déplacement des masses d'air et de la distribution de la chaleur dans l'atmosphère et l'océan. Idéalement, la description de cette dynamique peut se faire via des modèles numériques, qui exploitent des observations du monde «réel», et dont le but est d'inclure tous les processus jouant un rôle significatif dans la description du système Océan-Atmosphère. Cette étude s'intéresse au problème de l'estimation du mouvement des fluides géophysiques sur des séquences d'images, pour des applications en météorologie et en océanographie. Plus particulièrement, en océanographie, nous essayons d'estimer le mouvement des courants à la surface, qui sont une composante fondamentale des cycles biogéochimiques et hydrologiques sur Terre : la connaissance de ces courants permet de suivre l'évolution du phytoplancton et du zooplancton, de composés chimiques tels que les sels, l'oxygène et le dioxyde de carbone, et même de polluants. En météorologie, nous tentons d'estimer le déplacement des masses d'air de l'atmosphère. La connaissance des vents permet alors d'améliorer ou de valider les modèles numériques de prévision et d'aide à la décision dans des situations spécifiques : cyclones et orages importants, par exemple.

L'estimation du mouvement apparent fluide est un cas particulier du problème général de l'estimation du mouvement apparent en traitement de l'image numérique. C'est un sujet largement étudié depuis le début des années 1980, et dont les applications sont très nombreuses : robotique, imagerie médicale, navigation assistée par ordinateur et sécurités civile et militaire en sont quelques exemples. L'idée de base est la formulation d'une hypothèse de conservation du niveau de gris des pixels de la scène observée au cours du temps. Cette hypothèse, qui peut se traduire d'un point de vue mathématique par une équation différentielle, a pour but d'estimer un vecteur vitesse bidimensionnel \mathbf{w} entre deux instants, par exemple entre deux images successives I_0 et I_1 d'une séquence, en tout point de la scène. Cependant, il est connu que l'équation de conservation ne permet pas à elle seule d'estimer \mathbf{w} , car elle est sous-déterminée. On dit qu'il s'agit d'un problème mal posé, admet une infinité de solutions. En pratique, ce problème est résolu par l'ajout d'une équation supplémentaire, portant sur les propriétés de régularité du champ que l'on cherche à estimer. L'espace des solutions recherchées est ainsi réduit, et il est possible d'estimer un vecteur mouvement unique en tout point de l'image.

Les méthodes classiques d'estimation du mouvement apparent ne sont pas adaptées aux fluides, tels que l'eau et l'air. En effet, elles ne prennent pas en compte la nature des don-

nées étudiées. Tout d'abord, les déformations, subies par les fluides, sont plus complexes que celles subies par des corps rigides : on dit que les fluides sont des «milieux parfaitement déformables». De plus, bien que l'eau et l'air soient tous deux des fluides, leur mouvement n'est pas régi par les mêmes lois physiques, car ils ne sont pas de même nature. L'eau en mouvement est un fluide incompressible et de divergence nulle, tandis que l'air en mouvement est un fluide compressible et de divergence non nulle. Signalons que nous n'aborderons pas dans cette étude la chimie des structures en mouvement mais, uniquement leur transport à proprement parler. Un autre aspect important est la prise en compte du comportement turbulent du fluide. Dans ce cas, le fluide présente des structures particulières comme des tourbillons de taille et durée variées. Une estimation multi-échelles du mouvement devient alors nécessaire.

Une question que l'on peut se poser est : «Quelles sont les données disponibles pour l'estimation du mouvement des fluides géophysiques ?». Les mesures fournies par les bouées de mer, fixes ou dérivantes, par les ballons sondes et par les stations météorologiques au sol, sont nombreuses et fiables. Toutefois, elles sont réparties irrégulièrement sur la surface du globe terrestre : par exemple, en océanographie, les bouées sont majoritairement placées dans l'hémisphère nord. Par ailleurs, la mise en œuvre de capteurs de mesures *in situ* nécessite des moyens lourds et une importante intervention humaine, ce qui a un coût non négligeable. Les satellites, eux, ont un prix de construction et de mise en place élevé, mais l'exploitation de leurs données ne nécessite pas de coût. Ils constituent un moyen d'observer l'évolution de phénomènes rapides, avec une couverture spatiale large et une acquisition temporelle adaptée : de l'ordre de 15 à 30 minutes pour les satellites géostationnaires, et de l'ordre du jour pour ceux qui sont en orbite basse. Les satellites acquièrent des séquences d'images représentant l'énergie radiative mesurée par un capteur dans différentes bandes de longueurs d'onde. Cette énergie peut être reliée à des grandeurs physiques de la cible observée, comme par exemple la température ou la salinité.

Les satellites imageurs que nous considérons dans cette étude sont à visée nadir (visée verticale en direction de la Terre). Sur les images qu'ils acquièrent, seule la projection du mouvement réel sur le plan image est observable. Sur les images météorologiques du canal infrarouge, ce mouvement apparent correspond à celui du sommet des nuages. Dans le canal vapeur d'eau, il correspond au flux d'humidité en suspension dans les basses couches de l'atmosphère. Sur les images océanographiques, le mouvement apparent correspond aux courants de surface. Les satellites peuvent donc être vus comme une source d'information complémentaire des mesures effectuées *in situ*, et c'est sur ce type de données que nous avons travaillé.

Nous avons choisi de formuler les modèles d'estimation du mouvement dans le cadre des splines vectorielles. Le champ de vecteurs estimé est une fonction spline, qui minimise une fonctionnelle d'énergie et vérifie une équation de conservation en des «points de contrôle» (un sous-ensemble des points de l'image), où l'équation de conservation est valide. La solution s'exprime comme une somme de fonctions de base, pondérées par des coefficients réels, qui sont des dilatées et translatées d'une fonction mère. Cette approche présente plusieurs avantages.

Tout d'abord, le choix de la fonction mère permet de définir la régularité du champ estimé. Des travaux existent sur l'approximation vérifiant la contrainte de régularité Div-Rot du second ordre [Amodei, 1991; Amodei et Benbourhim, 1994], adaptée aux mouvements fluides et permettant d'obtenir des champs de vitesse réguliers en divergence et en vorticité.

D'autre part, l'approche par spline vectorielle permet d'estimer le mouvement uniquement sur

1.2. Contributions apportées

les zones de l'image où l'équation de conservation est valide, et de faire une approximation vérifiant la contrainte de régularité choisie sur le reste du domaine image. A l'inverse, les méthodes classiquement utilisées sont itératives et résolvent une équation du mouvement en tout point de l'image, et ce même sur les zones où l'équation de conservation n'est pas exploitable, en effectuant un compromis entre contrainte de régularité et équation de conservation.

Enfin, l'emploi d'une fonction mère à décroissance rapide permet une formulation multi-échelles des modèles, et de représenter efficacement les structures de tailles variées et liées à la turbulence dans les images.

1.2 Contributions apportées

Dans cette thèse, nous définissons des modèles d'estimation du mouvement fluide. Nous apportons trois contributions principales :

- **Un modèle de spline vectorielle pour l'estimation du mouvement fluide :**

Nous présentons, dans une première partie, un modèle, appelé **PUSP (Partition de l'unité et Spline Vectorielle)**, permettant d'estimer le mouvement fluide dans un cadre de splines vectorielles. **PUSP** étend celui défini par Suter [Suter, 1994], fondé sur l'équation de conservation de la luminance et la contrainte de régularité Div-Rot du second ordre. Il est capable d'estimer le mouvement apparent à l'aide de l'équation de conservation de la luminance (cas des fluides incompressibles) ou de l'équation de conservation de la masse (cas des fluides compressibles), et minimise les variations en divergence et en vorticité du champ de mouvement sur tout le domaine image.

Le champ de vitesse est estimé par le modèle à partir d'un ensemble de points de contrôle. La sélection de ces points dans les images se fait en fonction de critères locaux : seuil sur la norme du gradient spatial et sur un indice de mouvement. Par conséquent, ils peuvent être nombreux et il n'y a pas de garantie que leur répartition spatiale soit régulière.

La fonction mère minimisant la contrainte de régularité Div-Rot du second ordre tend vers l'infini, à mesure que la distance à l'origine augmente. L'évaluation de la spline dépend donc de tous les points de contrôle. Le coût de calcul de la solution devient prohibitif lorsque le nombre de points de contrôle sélectionnés est important ($n > 3000$).

Ce constat nous incite à formuler une stratégie efficace pour le calcul d'une solution. Nous apportons une amélioration numérique en effectuant une décomposition spatiale du domaine image : l'image est découpée en sous-domaines qui s'intersectent et dans chacun desquels un approximant est calculé. Les approximants sont ensuite «fusionnés» grâce à des fonctions de base radiale, qui vérifient une partition de l'unité. Cette méthode est plus rapide et numériquement plus stable que la résolution d'un unique problème sur tout le domaine image. En outre, la solution calculée vérifie les propriétés des approximants dans les sous-domaines de l'image : régularité Div-Rot du second ordre et équation de conservation vérifiée aux points de contrôle.

Puisque le modèle utilise une fonction mère qui n'est pas à décroissance rapide, il ne peut pas s'inscrire dans une stratégie multi-échelles. Nous proposons donc deux modèles d'estimation multi-échelles du mouvement, exploitables sur des séquences d'images où l'on observe de la turbulence.

– **Un modèle d'estimation du mouvement par «représentation multi-échelles des points de contrôle» :**

Ce modèle réalise une représentation multi-échelles des points de contrôle. Elle est basé sur un algorithme géométrique, utilisé pour générer, à chaque échelle, un sous-ensemble des points de l'ensemble original. Le mouvement est calculé à l'aide d'une fonction mère à support compact, issue de l'approche proposée par Amodei [Amodei et Benbourhim, 1994], qui réalise une approximation de la spline vectorielle minimisant la contrainte de régularité Div-Rot du seconde ordre. L'équation de conservation de la luminance est vérifiée sur les points de contrôle. Le modèle est adapté à des applications en océanographie.

– **Un modèle d'estimation multi-échelles du mouvement «par pyramide gaussienne» :**

Dans une dernière partie, nous définissons un modèle d'estimation multi-échelles du mouvement. Il est basé sur une représentation des images par pyramide gaussienne [Weber et Malik, 1995]. Le mouvement est estimé à l'échelle la plus «grossière». A chaque échelle, le modèle calcule un incrément de mouvement, de telle sorte que le mouvement à pleine résolution est la somme du mouvement «grossier» et de tous les incréments.

L'estimation des incréments se fait, à chaque échelle, par utilisation d'une spline vectorielle vérifiant le minimum d'une fonctionnelle de deux termes : un compromis entre l'équation de conservation de la luminance ou de la masse aux points de contrôle, et la contrainte de régularité Div-Rot du second ordre sur l'image. Cette spline vectorielle utilise une fonction mère prédéfinie, à support compact, de taille liée au facteur d'échelle.

1.3 Organisation du document

L'organisation du document est la suivante : dans le chapitre **2**, nous décrivons des notions générales de mécanique des fluides. Puis, dans le chapitre **3**, nous présentons les capteurs satellite, dont nous avons exploité les mesures pour la formulation des modèles. Dans le chapitre **4**, nous abordons la problématique du mouvement en traitement d'image, et dans le chapitre **5**, nous détaillons les techniques d'interpolation et d'approximation vectorielle, qui sont les techniques sur lesquelles se fondent les modèles développés dans cette étude. Nos contributions sont détaillées dans les chapitres **6**, **7** et **8** : trois modèles d'estimation du mouvement apparent fluide. Ces modèles se placent tous dans un cadre d'approximation vectorielle, mais proposent des solutions différentes pour la modélisation du mouvement fluide. Le premier modèle apporte une amélioration numérique d'un modèle existant, et une extension au cas des fluides compressibles. Les deux autres modèles proposent des approches «multi-échelles». Nous proposons, dans le chapitre **9**, une analyse des résultats obtenus. Enfin, dans le chapitre **10**, nous détaillons les conclusions et les perspectives de ce travail.

Chapitre 2

Mécanique des fluides : circulation océanographique et atmosphérique

Ce chapitre présente quelques notions générales sur les fluides, notamment leurs propriétés au repos et leur comportement en mouvement. Nous commençons par introduire des éléments d'hydrostatique, puis d'hydrodynamique. Ensuite, nous décrivons les équations générales de la mécanique des fluides. Enfin, nous abordons la notion de turbulence, propriété importante des fluides en mouvement. Dans la suite du document, nous ferons référence aux éléments expliqués dans ce chapitre, afin de formuler des modèles d'estimation du mouvement sur des séquences d'images satellite.

2.1 Introduction

La mécanique des fluides est un domaine de la physique qui s'intéresse à l'étude du comportement des fluides, c'est-à-dire des liquides et des gaz, lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes. C'est une discipline mathématique utilisée pour représenter, de manière simple et maniable, une réalité complexe, en faisant appel à des notions différentes de celles développées en mécanique du point ou du solide. Un fluide, bien que constitué d'atomes au niveau microscopique, est considéré au niveau macroscopique comme un **milieu continu** : la nature moléculaire discrète est ignorée, et on admet que des propriétés telles que la densité, la pression, la température et la vitesse modélisent le milieu. Les propriétés du fluide sont donc des fonctions continues des variables d'espace et du temps. Le mouvement fluide est un *écoulement*, avec une déformation continue.

Deux branches d'étude existent en mécanique des fluides : la **statique des fluides**, ou **hydrostatique**, qui étudie les fluides au repos, et la **dynamique des fluides**, ou **hydrodynamique**, qui étudie les fluides en mouvement. De ce dernier point de vue, les fluides peuvent être classés suivant deux catégories, *newtoniens* (eau, air et la plupart des gaz), ou *non-newtoniens* (sang, gel, boue, pâtes, suspensions et émulsions) en fonction de leur viscosité, propriété qui désigne la capacité d'un fluide à s'écouler. Les applications de la mécanique des fluides sont nombreuses et concernent des domaines très variés. On peut citer la biologie, la géophysique, l'astrophysique, l'océanographie, la météorologie, le génie chimique, le nucléaire, l'aéronautique, l'hydraulique ou encore l'écologie. En fait, le concept de fluide peut être étendu très largement : par exemple dans certaines applications de gestion de la circulation routière, le trafic est assimilé à un fluide continu.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la définition des propriétés des fluides et des formalismes utilisés pour décrire leur mouvement, notamment dans le cas de l'eau des océans et

des gaz de l'atmosphère. Nous énonçons les équations générales de la mécanique des milieux continus, qui permettent de modéliser l'évolution temporelle. Enfin, nous introduisons la notion de turbulence, fondamentale en mécanique des fluides.

2.2 Hydrostatique

Dans cette section, nous introduisons quelques propriétés des fluides (liquides et gaz) au repos.

2.2.1 Définition d'un fluide

Un fluide est un corps qui n'est pas dans une phase solide. Les fluides sont des milieux déformables, comme les gaz, qui sont compressibles, et les liquides, qui sont peu compressibles. A l'échelle macroscopique, les liquides sont caractérisés par le fait qu'ils n'ont pas de forme

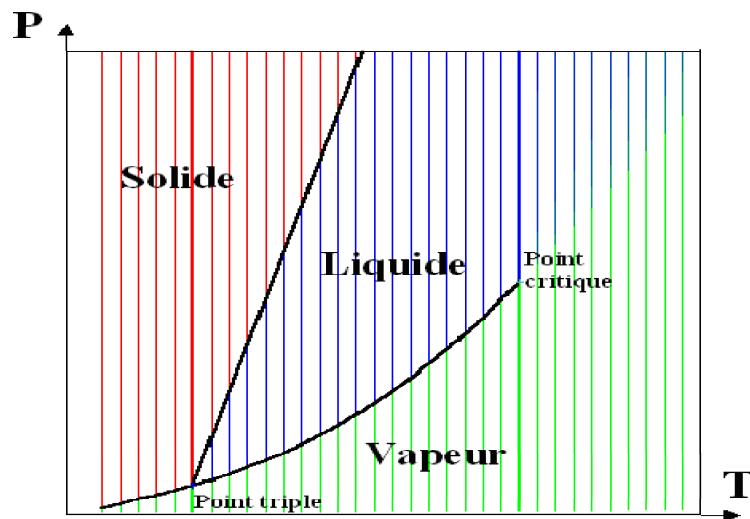


FIG. 2.1 – Diagramme de phase d'un corps pur. Au point triple, les trois phases coexistent pour une température et une pression donnée. Au delà du point critique, lorsque le couple température-pression est élevé, le corps ne présente plus qu'une seule phase.

propre et prennent celle du récipient dans lequel ils se trouvent. De plus, leur surface libre au repos est plane et horizontale, et ils possèdent un volume propre qui ne change qu'avec la température (peu en général). Dans un gaz, les molécules ne sont pas liées : elles peuvent s'éloigner les unes des autres. D'un point de vue macroscopique, les gaz n'ont pas de forme et de volume propre : ils tendent à occuper tout le volume disponible. La figure 2.1 représente le diagramme de phase d'un corps pur, constitué d'un seul type de molécules, en fonction de la température T et de la pression P . Lorsque que le couple température-pression est élevé, le corps ne possède qu'une seule phase. Dans ce cas, selon les valeurs de température et de pression, les caractéristiques physiques du fluide se rapprochent d'une phase liquide ou gazeuse.

2.2.2 Masse volumique et densité d'un fluide

La masse volumique ρ est une mesure de quantité de matière contenue par unité de volume. Si on considère un élément de volume $dVol = dx dy dz$ d'un fluide, la masse de cet élément est

2.2. Hydrostatique

dm . La masse volumique vaut :

$$\rho = \frac{dm}{dVol}. \quad (2.1)$$

L'unité de ρ , notée $[\rho]$, est $[\rho] = kg.m^{-3}$. Le volume d'un élément de masse dépendant de la température et de la pression, la masse volumique dépend également des conditions de température et de pression.

Pour les liquides, la densité ρ_d d'un matériau est le rapport de la masse volumique de ce matériau à celle de l'eau. Pour les gaz, la densité ρ_d est calculée en rapport avec la masse volumique de l'air à une température et une pression donnée. La densité est donc un nombre sans dimension :

$$\rho_d = \frac{\rho}{\rho_{ref}}, \quad (2.2)$$

où ρ_{ref} est la masse volumique de l'eau ou de l'air à une température de référence.

2.2.3 Pression dans un fluide

La pression p est définie comme le rapport d'une force F avec l'aire de la surface S sur laquelle elle s'applique :

$$p = \frac{F}{S}. \quad (2.3)$$

L'unité de pression est le Pascal $[p] = Pa = N.m^{-2}$.

En océanographie, on constate expérimentalement que la pression dans l'eau ne dépend que de la profondeur et pas de la direction. En météorologie, la pression atmosphérique diminue avec l'altitude et il est ainsi possible d'utiliser la pression pour mesurer la hauteur. La pression est ainsi souvent utilisée comme coordonnée verticale : on parle par exemple de la température à 700 hPa.

2.2.4 Équations d'état de l'océan et de l'atmosphère

L'état d'un fluide décrit son équilibre thermique, mécanique et chimique. Les variables classiquement utilisées sont : la pression p , la température T et la composition chimique. Dans l'océan, les concentrations des sels étant en proportion quasi-constante (pourcentage d'ions par unité de masse : chlorure 55%, sodium 30%, sulfate 8%, magnésium 4%, potassium 1%, et calcium 1%), il est possible de décrire ces concentrations à partir de la salinité s , égale à la masse de sels dissoute par élément. La masse volumique ρ vérifie alors l'équation d'état :

$$\rho = \rho(s, T, p). \quad (2.4)$$

L'équation d'état de l'air est donnée de manière approximative par les lois de comportement d'un gaz parfait :

$$\rho_{air\ sec} = \rho(T, p_{air\ sec}). \quad (2.5)$$

Cependant, l'air atmosphérique n'étant jamais totalement sec, l'équation d'état doit donc inclure l'humidité :

$$\rho = \rho(q, T, p), \quad (2.6)$$

où q est l'humidité spécifique, définie comme le rapport de la masse d'eau dans l'air sur la masse d'air humide. Dans la plupart des cas, c'est l'équation d'état pour l'air sec ($q = 0$) qui

est utilisée et les effets de l'humidité sur la densité sont ignorés. Cependant, dans des conditions tropicales, ce n'est plus justifié, car le degré de vapeur d'eau dans l'air augmente très rapidement avec la température.

2.3 Hydrodynamique

La dynamique des fluides s'intéresse aux différentes manières de décrire un fluide en mouvement. Elle permet d'étudier les variations locales de position, de vitesse, ou autres, d'une particule. Deux formalismes sont utilisés pour décrire mathématiquement les propriétés des fluides en mouvement : le formalisme de **Lagrange** et celui d'**Euler**. Chacun de ces formalismes possède son intérêt selon le type de milieu que l'on observe. Des formules permettent de passer d'une description à l'autre.

2.3.1 Formalismes d'Euler et Lagrange

2.3.1.1 Formalisme de Lagrange

La description de Lagrange consiste à attacher une grandeur γ aux particules et à suivre ces particules dans leur mouvement. On considère qu'une particule est un ensemble de molécules du fluide. Comme illustré sur la figure 2.2(a), le repérage d'une particule fluide donnée est fonction de la position \mathbf{x}_0 qu'elle occupe à l'instant $t = 0$. La configuration de référence est l'ensemble des positions initiales. La grandeur γ varie avec le temps et :

$$\gamma \equiv \gamma(\mathbf{x}_0, t). \quad (2.7)$$

Les variables (\mathbf{x}_0, t) sont appelées variables de Lagrange. Avec cette description, les particules d'un élément de volume, arbitrairement choisi dans le fluide, lui appartiennent à tout instant t . Un tel volume est dit **matériel** : il se déplace et se déforme avec le mouvement du milieu. Le flux de matière à travers la surface d'un volume matériel est ainsi nul.

2.3.1.2 Formalisme d'Euler

La description d'Euler consiste à «regarder évoluer» un phénomène complexe depuis un point d'observation fixe, noté $\mathbf{x} = (x, y, z)$, autour duquel on considère un **volume géométrique** fixe. Les propriétés du fluide sont étudiées pour les variables d'Euler \mathbf{x} et t . Notons qu'une même grandeur γ , mesurée en un même point \mathbf{x} à deux instants différents, correspond à deux particules fluides distinctes (voir figure 2.2(b)). Le flux de matière à travers la frontière d'un volume géométrique est généralement non nul.

2.3.1.3 Équivalence des formalismes d'Euler et de Lagrange

Supposons que l'on connaisse la description de Lagrange d'un milieu continu, avec comme configuration de référence un domaine géométrique. La position instantanée d'une particule est donnée par :

$$\mathbf{x} = \gamma(\mathbf{x}_0, t). \quad (2.8)$$

La vitesse de la particule, identifiée par sa position de référence \mathbf{x}_0 , est la dérivée par rapport au temps de la position courante :

$$\mathbf{V}_L(\mathbf{x}_0, t) = \frac{d\gamma(\mathbf{x}_0, t)}{dt} = \frac{\partial \gamma(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \text{ (dérivée à } \mathbf{x}_0 \text{ constant)}. \quad (2.9)$$

2.3. Hydrodynamique

$\mathbf{V}_L(\mathbf{x}_0, t)$ est la description de Lagrange du champ de vitesse. Pour obtenir la description d'Euler des vitesses, il faut exprimer la vitesse en fonction de la position courante. En faisant l'hypothèse que γ est inversible, la position initiale s'écrit, en fonction de la position courante :

$$\mathbf{x}_0 = \gamma^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (2.10)$$

En substituant \mathbf{x}_0 par sa valeur, dans l'expression de la vitesse, on en déduit la description d'Euler du mouvement :

$$\frac{\partial \gamma(\gamma^{-1}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial t} = \mathbf{V}_E(\mathbf{x}, t). \quad (2.11)$$

Réciproquement, supposons que l'on connaisse la description d'Euler du mouvement d'un milieu matériel continu sur un domaine géométrique. On connaît la vitesse d'une particule :

$$\mathbf{V}_E(\mathbf{x}, t). \quad (2.12)$$

La position $\mathbf{x}(t)$ est solution de l'équation différentielle vectorielle :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{V}_E(\mathbf{x}, t), \quad (2.13)$$

avec la condition initiale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. La solution de ce système différentiel donne la position \mathbf{x} de la particule en fonction de \mathbf{x}_0 et de t : c'est la description de Lagrange.

2.3.1.4 Comparaison des deux descriptions

Les deux descriptions présentent chacune leur utilité, suivant le type de milieu que l'on étudie. Pour un solide déformable, la description de Lagrange est souvent préférée, car la configuration de référence est facilement identifiable. Par ailleurs, la connaissance des vitesses, durant la transformation due à l'application de forces extérieures, a souvent peu d'intérêt. En effet, on s'intéresse plutôt à la position finale, lorsque l'application de forces extérieures n'a plus lieu. Pour les fluides, c'est la description d'Euler qui est la plus employée : on s'intéresse peu à la position individuelle des particules, mais à des instruments de mesure fixes, placés en certains points d'observation de l'écoulement.

2.3.2 Dérivée particulaire

On appelle *dérivée particulaire* d'une grandeur, le taux de variation temporelle de cette grandeur, obtenue en suivant une particule fluide à laquelle elle est attachée. Pour la grandeur physique γ , on la note $\frac{d\gamma}{dt}$:

$$\begin{aligned} - \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{\partial \gamma}{\partial t}(\mathbf{x}_0, t) \text{ en description de Lagrange,} \\ - \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{\partial \gamma}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_i V_i \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) \text{ en description d'Euler.} \end{aligned}$$

2.3.3 Viscosité dynamique et viscosité cinématique

La viscosité, ou fluidité, désigne la capacité d'un fluide à s'écouler. Lorsque la viscosité augmente, le fluide s'écoule moins facilement. Le mouvement d'un fluide peut être considéré

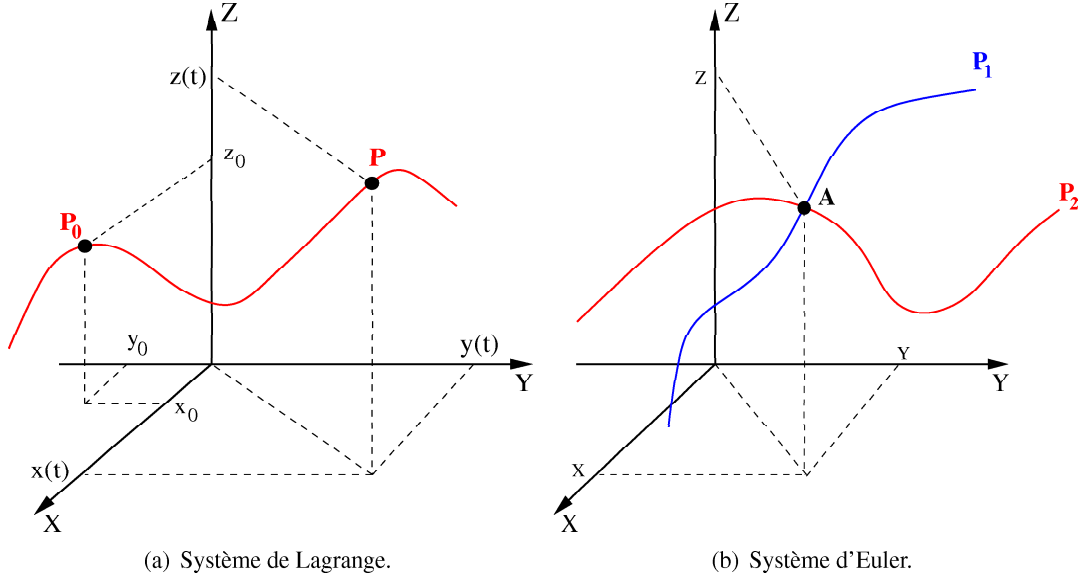


FIG. 2.2 – Systèmes de description des fluides en mouvement. (a) La particule P , de coordonnée $\mathbf{x}(t)$, se trouve en P_0 à l'instant t_0 . La grandeur γ attachée à la particule P est une fonction du temps t et de \mathbf{x}_0 . (b) La grandeur physique γ est attachée au point A de coordonnée \mathbf{x} . À l'instant t_1 , c'est la grandeur de la particule P_1 qui passe en A . À l'instant t_2 , c'est celle de la particule P_2 qui passe en A .

comme résultant du glissement des couches de fluide les unes sur les autres. La force de frottement F , qui s'exerce autour de la surface de séparation S de deux couches, s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. En un point donné, situé à une distance dz de S , cette force est proportionnelle à la vitesse relative dv (différence des vitesses des couches), et inversement proportionnelle à dz :

$$F = \mu S \frac{dv}{dz}. \quad (2.14)$$

Le facteur de proportionnalité μ , exprimé en pascal par seconde $[\mu] = Pa.s^{-1}$, est appelé **viscosité dynamique**. Dans le cas des fluides newtoniens, cette grandeur est constante et indépendante du gradient de vitesse. La **viscosité cinématique** s'obtient en divisant la viscosité dynamique par la masse volumique ρ :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad (2.15)$$

avec $[\nu] = m^2.s^{-1}$.

2.3.4 Description d'un champ de vecteurs

2.3.4.1 Divergence

La divergence est définie comme le produit scalaire de l'opérateur gradient et de la vitesse $\mathbf{V} = (u, v, w)^T$:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \text{div}(\mathbf{V}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2.16)$$

En considérant un élément de volume Vol , on montre que l'on a :

$$\text{div}(\mathbf{V}) = \frac{1}{Vol} \frac{d}{dt}(Vol). \quad (2.17)$$

2.3. Hydrodynamique

Cela signifie que $\text{div } \mathbf{V}$ est le taux relatif de variation de volume de la particule fluide au point considéré.

Dans le cas d'un champ de vecteurs bidimensionnel, la dérivée par rapport à z est supprimée dans l'expression (2.16). Un exemple de champ bidimensionnel purement divergent est illustré sur la figure 2.3(a).

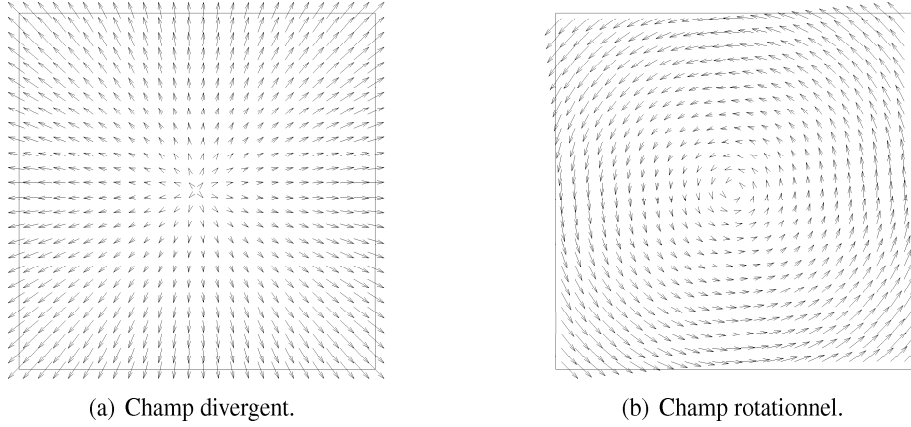


FIG. 2.3 – Divergence et rotationnel.

2.3.4.2 Rotationnel et vorticité

En calculant le produit vectoriel de l'opérateur gradient et du champ de vecteurs \mathbf{V} , on obtient le rotationnel de la vitesse, ou vorticité :

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V} = \text{rot}(\mathbf{V}) = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z, \quad (2.18)$$

où $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ sont les vecteurs unitaires des axes x, y et z .

Dans le cas d'un champ de vecteurs bidimensionnel dans le plan xy , les composantes en x et y disparaissent et le vecteur de vorticité est perpendiculaire au plan :

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_z \mathbf{e}_z. \quad (2.19)$$

Le scalaire ω_z est l'intensité de la vorticité :

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.20)$$

Un exemple de champ bidimensionnel purement rotationnel est illustré sur la figure 2.3(b).

2.3.4.3 Lignes de courant

Une manière efficace de visualiser un champ de vecteurs consiste à le représenter par un ensemble de lignes de courant, car elles donnent une bonne information sur la topologie du champ étudié. Une ligne de courant est tangente en tout point au vecteur $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ (à t fixé). Le tracé d'une ligne de courant se fait en général par intégrations successives du champ de vitesse. La représentation par lignes de courant d'un champ de vecteurs est illustrée sur la figure 2.4.

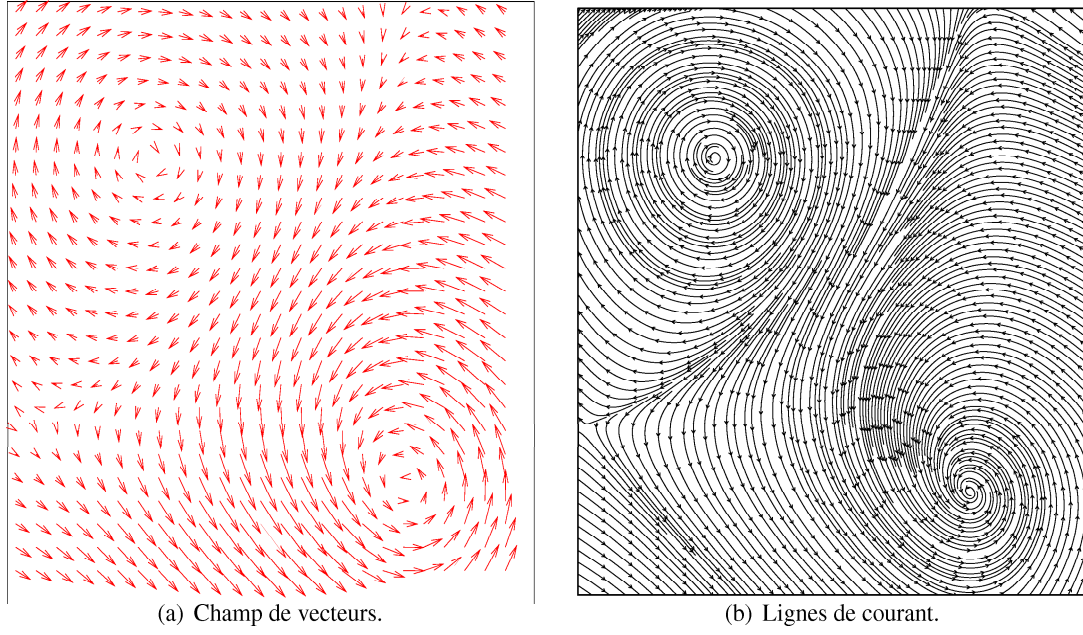


FIG. 2.4 – Représentation par lignes de courant d'un champ de vecteurs.

2.4 Équations générales de la mécanique des fluides

L'étude de la dynamique des fluides se fonde sur des lois de conservation, telles que la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement (ou principe fondamental de la mécanique) et la conservation de l'énergie interne. Ces lois ont une forme globale, décrite pour un domaine matériel, et une forme locale, qui est une équation différentielle valable en chaque point du domaine. Elles peuvent être utilisées sous une forme ou une autre. Les équations les plus importantes sont les équations de Navier-Stokes. Ce sont des équations différentielles non-linéaires décrivant le mouvement des fluides. Dans la suite de ce chapitre, nous utilisons ces équations suivant la description d'Euler et dans leur forme locale.

2.4.1 Conservation de la masse

Lorsqu'un élément matériel se déplace, sa masse reste constante mais son volume peut changer au cours du temps. La densité peut donc varier, et dépend du champ de mouvement. L'équation permettant de relier la variation de densité et le champ de mouvement est l'**équation de continuité**, ou **ECM (Equation de Conservation de la Masse)**. Considérons un volume géométrique fixe, traversé par le fluide en mouvement : en faisant le bilan des masses entrante et sortante sur les faces opposées, on peut écrire la variation de masse par unité de volume :

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = -\text{div}(\rho \mathbf{V}), \quad (2.21)$$

avec \mathbf{V} la vitesse. On en déduit l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (2.22)$$

En développant l'opérateur de divergence, l'équation (2.22) s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div} \mathbf{V} + \nabla \rho \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (2.23)$$

2.4. Équations générales de la mécanique des fluides

Si le fluide est incompressible, la divergence du champ de vitesse est nulle et l'équation de continuité (2.23) s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (2.24)$$

soit encore, en utilisant la formule de la dérivée particulaire en variables d'Euler :

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (2.25)$$

2.4.1.1 Conservation d'une quantité scalaire

L'équation de continuité est un cas particulier de l'équation, plus générale, de conservation d'une quantité scalaire : conservation de la masse volumique ρ , de la température T , ou de la salinité s . Le même raisonnement se généralise donc à la variation d'une quantité scalaire transportée à travers les faces d'un élément de volume. Si Q_v est la quantité scalaire considérée par unité de volume, on définit son flux par unité de surface comme :

$$F = Q_v \mathbf{V}. \quad (2.26)$$

On peut alors écrire le bilan de Q_v pour l'élément de volume comme :

$$-\frac{\partial F_x}{\partial x} - \frac{\partial F_y}{\partial y} - \frac{\partial F_z}{\partial z} = -\nabla \cdot F = -\text{div}(F). \quad (2.27)$$

En d'autres termes, l'équation satisfaite par Q_v est :

$$\frac{\partial Q_v}{\partial t} + \text{div}(F) = 0. \quad (2.28)$$

L'ECM correspond au cas où $Q_v = \rho$ et $F = \rho \mathbf{V}$. L'équation de conservation de la salinité s (où de l'humidité) est le cas où $Q_v = \rho s$ et $F = \rho s \mathbf{V}$ et on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \text{div}(\rho s \mathbf{V}) = 0. \quad (2.29)$$

2.4.2 Equation d'advection-diffusion

En plus du transport, les constituants d'un fluide peuvent être soumis à des processus de diffusion, lorsqu'il y a des gradients de salinité ou d'humidité. Si on note ϱ la salinité ou l'humidité, le flux diffusif est dans la direction opposée à $\nabla \varrho$, le gradient de ϱ . Il transporte la quantité ϱ des régions de forte concentration vers les régions de faible concentration et vaut :

$$-\rho \kappa_D \nabla \varrho, \quad (2.30)$$

où κ_D est la diffusivité, un coefficient qui détermine le taux de diffusion et dépend de l'état du fluide (donc de la température, de la pression et de la salinité). Le flux global s'écrit alors :

$$F = \rho \varrho \mathbf{V} - \rho \kappa_D \nabla \varrho, \quad (2.31)$$

et l'équation de conservation (2.28) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varrho) + \text{div}(\rho \varrho \mathbf{V} - \rho \kappa_D \nabla \varrho) = 0 \Leftrightarrow \rho \frac{d\varrho}{dt} = \text{div}(\rho \kappa_D \nabla \varrho). \quad (2.32)$$

Le coefficient $\rho\kappa_D$ est une fonction d'état du fluide, mais ses variations sont suffisamment petites pour le considérer constant. L'équation d'advection-diffusion se simplifie alors sous la forme :

$$\frac{dQ}{dt} = \kappa_D \Delta Q. \quad (2.33)$$

La valeur de κ_D pour le sel dans l'eau est $1.5 \times 10^{-9} m^2.s^{-1}$ à $25C^\circ$, celle pour la vapeur d'eau dans l'air est de $2.4 \times 10^{-5} m^2.s^{-1}$ à $8C^\circ$. Les processus de diffusion dans l'eau et l'air étant lents, nous les négligeons dans l'étude.

2.4.3 Equation du mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement est l'expression de la seconde loi de Newton, appliquée à un élément de volume matériel : la somme des forces extérieures est égale au produit de la masse par l'accélération. Les principales forces sont les forces de pression et le champ gravitationnel, qui est le gradient du potentiel gravitationnel Φ_v . La résultante de ces deux forces pour une unité de masse s'écrit :

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi_v. \quad (2.34)$$

La conservation de la quantité de mouvement est donc :

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi_v. \quad (2.35)$$

La vitesse est mesurée relativement à un repère fixe. En géophysique, la position \mathbf{x} et la vitesse \mathbf{V} sont mesurées relativement à un repère tournant car la Terre est en rotation. L'équation (2.35) s'écrit alors :

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi, \quad (2.36)$$

où $\boldsymbol{\Omega}$ est la vitesse angulaire du repère tournant. Le géopotential Φ est défini comme la somme du potentiel gravitationnel et d'un potentiel centrifuge :

$$\Phi = \Phi_v - \frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2). \quad (2.37)$$

En développant l'équation (2.36) pour chacune des composantes de \mathbf{V} , on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) + 2\Omega_y \rho w - 2\Omega_z \rho v = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{V}) + 2\Omega_z \rho u - 2\Omega_x \rho w = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \mathbf{V}) + 2\Omega_x \rho v - 2\Omega_y \rho u = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g. \quad (2.40)$$

Le repère 3D est choisi tel que l'axe z pointe dans la direction verticale haute, c'est-à-dire dans la direction de $-\mathbf{g}$. La force gravitationnelle $-\mathbf{g}$ est définie par :

$$\mathbf{g} = \nabla \Phi. \quad (2.41)$$

2.4. Équations générales de la mécanique des fluides

En ignorant les changements de viscosité et la compressibilité, l'accélération fait intervenir le flux diffusif $\nu \Delta \mathbf{V}$. Les équations (2.38), (2.39) et (2.40) s'écrivent alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V} - \mu \nabla u) + 2\Omega_y \rho w - 2\Omega_z \rho v = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{V} - \mu \nabla v) + 2\Omega_z \rho u - 2\Omega_x \rho w = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \mathbf{V} - \mu \nabla w) + 2\Omega_x \rho v - 2\Omega_z \rho u = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g. \quad (2.44)$$

En considérant μ constante, l'équation de conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2\Omega \times \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{g} + \nu \Delta \mathbf{V}, \quad (2.45)$$

où $\nu = \mu/\rho$ est la viscosité cinématique du fluide, définie dans la section 2.3.3.

2.4.4 Equation de l'énergie interne

L'équation de l'énergie interne a une forme simple, lorsque les éléments de fluide n'échangent pas de chaleur avec l'environnement et gardent une composition fixe. Dans ce cas, le mouvement du fluide est dit isentropique. L'équation de l'énergie interne est :

$$\rho \frac{dE}{dt} \equiv \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{V}) = -p \nabla \cdot \mathbf{V}. \quad (2.46)$$

L'équation (2.46) s'interprète comme le fait que l'énergie interne dans un volume fixe varie soit sur les bords par advection, soit dans le volume par compression ou expansion.

Lorsque le fluide n'est pas isentropique, des termes additionnels sont à ajouter à l'équation (2.46). Ce sont :

- les échanges radiatifs avec l'environnement. Pour cela, il est nécessaire de connaître la densité du flux radiatif F^{rad} , qui peut être calculée si on connaît la distribution et l'état des agents émettant, réfléchissant ou absorbant.
- l'échange de chaleur par conduction moléculaire. Le flux de chaleur est alors proportionnel au gradient de température, et est donné par :

$$-k \nabla T, \quad (2.47)$$

où k est la conductivité thermique.

- La chaleur due à un changement de phase ou à une réaction chimique. L'effet de ces processus peut être représenté par un terme Q_H , qui donne le taux de chaleur par unité de volume.

La forme modifiée de (2.46) est alors :

$$\frac{\rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{V} + F^{rad} - k \nabla T) = Q_H - p \nabla \cdot \mathbf{V}. \quad (2.48)$$

En utilisant les relations entre variables d'état, on peut également exprimer cette équation en fonction de la température potentielle θ , température qu'aurait le fluide si on le ramenait au niveau de pression $1000hPa$ sans avoir échangé de chaleur avec le milieu extérieur. L'équation (2.48) devient alors :

$$\rho T c_p(p_r, \theta) \theta^{-1} \frac{d\theta}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T - F^{rad}) + Q_H. \quad (2.49)$$

2.4.5 Les équations de Navier-Stokes

L'évolution temporelle d'un fluide compressible, visqueux, de masse ρ et de vitesse \mathbf{V} , dans une région Ω de \mathbb{R}^3 , est donnée par le système d'équations de Navier-Stokes. Ce système comprend l'ECM (2.22), l'équation du mouvement (2.45) et l'équation de l'énergie interne (2.49). On complète ce système avec l'équation de conservation de la concentration du sel ou de l'humidité et l'équation d'état liant ρ , p , s et θ . On obtient alors le système d'équations suivant :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.50a)$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{g} + \nu \Delta \mathbf{V} \quad (2.50b)$$

$$\rho T c_p(p_r, \theta) \theta^{-1} \frac{d\theta}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T - F^{rad}) + Q_H \quad (2.50c)$$

$$\rho \frac{ds}{dt} = \nabla \cdot (\rho \kappa_D \nabla s) \quad (2.50d)$$

$$\rho = \rho(p, s, \theta) \quad (2.50e)$$

Un cas particulier important se produit quand le fluide est isentropique : l'état du fluide ne change pas au cours du temps, et $k \nabla T$, F^{rad} et Q_H sont nuls. Dans ce cas, les équations (2.50c) et (2.50d) se réduisent à :

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (\text{pas de dégagement de chaleur}) \quad (2.51a)$$

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad (\text{diffusion nulle}) \quad (2.51b)$$

L'équation de la vitesse (2.50b) devient :

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = -\rho^{-1} \nabla p - \mathbf{g} \quad (2.52)$$

Dans beaucoup de cas, on peut considérer que les changements de masse en fonction de la pression sont négligeables, en d'autres termes que le fluide est incompressible. Dans ce cas, l'équation (2.50a) devient :

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad (2.53)$$

et on a :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (2.54)$$

Le champ de mouvement est non divergent ou solénoïdal. Les conditions pour cette approximation sont données dans [Batchelor, 1967].

2.5 La turbulence

La turbulence est l'état d'un fluide, liquide ou gaz, dans lequel la vitesse présente en tout point un caractère tourbillonnaire. Les tourbillons ont une taille, une localisation et une orientation variées. Il n'existe pas de véritable définition de la turbulence, mais celle-ci peut être caractérisée par diverses propriétés.

2.5.1 Description qualitative

Les grandeurs physiques macroscopiques d'un écoulement turbulent, comme la vitesse et la pression, varient de façon rapide et aléatoire. La diffusivité (de la température, de la quantité de mouvement, *etc*) est élevée. Un écoulement turbulent est nécessairement rotationnel, car on y trouve de nombreux tourbillons de tailles variées :

- Les tourbillons de grande taille, qui correspondent aux grandes échelles, sont déterminés par des conditions aux limites : ils sont relativement stables dans le temps. Ils sont principalement responsables de la diffusion de quantité de mouvement : les échelles de longueur caractéristiques du transport et de la diffusion sont macroscopiques.
- Les tourbillons de petite taille, qui correspondent aux petites échelles, sont déterminés par la viscosité et ont une durée de vie courte.

L'énergie transportée par le fluide est transmise des grands tourbillons vers les plus petits, «en cascade». La dissipation sous forme de chaleur se fait au niveau des petits tourbillons.

2.5.2 Caractérisation des écoulements : Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds caractérise la nature turbulente d'un écoulement. En particulier la nature du régime : laminaire, transitoire, turbulent. Il représente le rapport entre forces d'inertie et forces visqueuses, ou le rapport (qualitatif) du transfert par advection et du transfert par diffusion de la quantité de mouvement :

$$Re = \frac{\rho \mathbf{V} D}{\eta}, \quad (2.55)$$

ou encore :

$$Re = \frac{\mathbf{V} D}{\nu}, \quad (2.56)$$

avec les unités **SI** :

- \mathbf{V} : vitesse du fluide [$m.s^{-1}$],
- D : dimension caractéristique du phénomène [m],
- μ : viscosité dynamique du fluide [$Pa.s$],
- ν : viscosité cinématique du fluide [$m^2.s^{-1}$],
- ρ : masse volumique du fluide [$kg.m^{-3}$].

On distingue trois principaux régimes :

- Aux faibles valeurs du nombre de Reynolds (inférieur à 1), les forces de viscosité sont prépondérantes. On parle d'écoulement de Stokes. L'écoulement est laminaire (figure 2.5, gauche) et son inertie est négligeable.
- Aux valeurs intermédiaires du nombre de Reynolds (entre 1 et 2000 environ), les forces d'inertie sont prépondérantes, mais l'écoulement reste laminaire.
- Aux fortes valeurs du nombre de Reynolds (au-delà d'environ 2000), les forces d'inertie sont si importantes que l'écoulement devient turbulent (figure 2.5, droite). Entre les régimes laminaire et turbulent, on parle de régime transitoire.

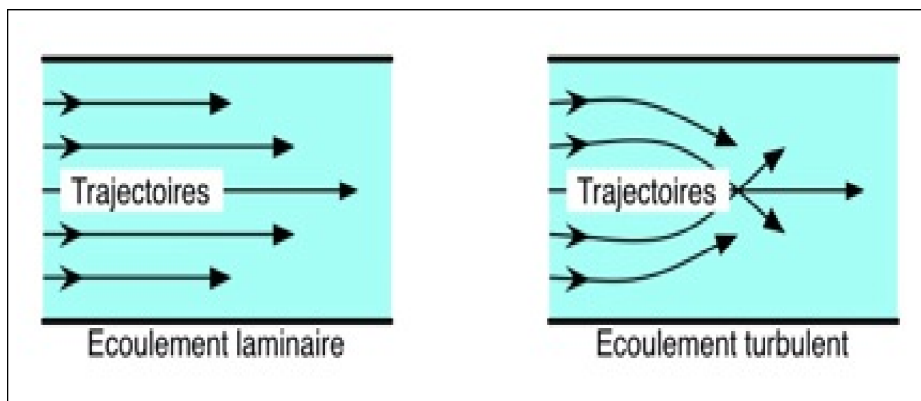


FIG. 2.5 – Écoulement laminaire ou turbulent.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principales propriétés des fluides au repos, ainsi que les équations d'état utilisées pour décrire l'océan et l'atmosphère. Ensuite, nous avons présenté les équations de conservation, qui régissent le comportement des fluides en mouvement. Enfin, nous avons abordé la notion de turbulence. Ces éléments de mécanique des fluides nous serviront, dans la suite du document, pour formuler des hypothèses physiques dans les modèles d'estimation du mouvement sur les séquences d'images satellite de fluides géophysiques.

Chapitre 3

Télédétection en océanographie et météorologie

Ce chapitre présente les capteurs satellite météorologique et océanographique, dont nous avons utilisé les données (mesures de Température de Surface de l'océan et d'humidité en suspension dans l'atmosphère) pour la définition de modèles d'estimation du mouvement apparent fluide. Dans un premier temps, nous introduisons les notions générales sur la télédétection par satellite et montrons l'intérêt d'exploiter de telles données pour l'étude. Nous présentons les types de capteurs les plus utilisés en observation de l'océan et de l'atmosphère et leurs applications potentielles. Dans la seconde partie du chapitre, nous présentons un satellite en particulier, Météosat.

3.1 Introduction

La télédétection désigne l'acquisition d'informations sur un objet ou un phénomène, à partir de mesures effectuées à distance par un capteur. La télédétection spatiale concerne les mesures effectuées par des capteurs embarqués sur des satellites. Ces capteurs enregistrent et mesurent les rayonnements émis ou réfléchis par la Terre, l'océan ou l'atmosphère. Les satellites océanographique et météorologique sont à visée nadir en direction de la Terre. Par conséquent, ils fournissent peu d'information sur la structure verticale de la cible. De plus, la précision de leurs mesures est moindre que celle des stations météorologiques au sol, ballons sondes et bouées sondes. On peut donc voir les satellites comme un outil offrant une information complémentaire, avec une bonne résolution spatiale, une couverture d'une large partie du globe terrestre, et une résolution temporelle élevée, qui permet de suivre l'évolution des phénomènes étudiés. Nous présentons, dans ce chapitre, les principes fondamentaux de la télédétection spatiale et les données issues de capteurs permettant d'observer le mouvement de fluides géophysiques, tels que l'eau de l'océan ou les gaz présents dans l'atmosphère. Ces données sont celles que nous avons exploitées pour définir les modèles d'estimation du mouvement fluide turbulent.

3.2 Capteurs satellite

La télédétection spatiale utilise des capteurs mesurant l'énergie radiative provenant de la scène visée. D'une manière générale, on peut identifier deux grandes familles de capteurs, effectuant des mesures dans différentes bandes de longueurs d'onde du spectre électromagnétique : les **capteurs passifs** et les **capteurs actifs**.

3.2.1 Spectre de rayonnement électromagnétique

Le spectre électromagnétique est la décomposition du rayonnement électromagnétique en terme de fréquence, ou de manière équivalente de longueur d'onde. Ce spectre est représenté sur la figure 3.1. Les sources de rayonnement électromagnétique considérées sont :

- **Le Soleil.** Une faible partie de son rayonnement, environ 10%, est émis dans la bande de longueurs d'onde des rayons ultraviolets (UV A,B et C), X et γ . Environ 40% du rayonnement restant est émis dans la bande du visible (longueurs d'onde de $0,3 \mu m$ à $0,7 \mu m$), et 50% dans celle du proche infrarouge.
- **La Terre (l'atmosphère, les nuages, la surface de l'océan, les fonds marins, les sols et les sous-sols).** Ces milieux émettent dans la bande de longueurs d'onde de l'infrarouge et des micro-ondes ($> 3 \mu m$, avec un pic à $10 \mu m$ pour l'ensemble des deux bandes de longueurs d'onde).

Notons que les spectres d'émission des deux sources sont séparés, et que le Soleil émet en quantité bien plus importante que la Terre.

Les interactions des ondes électromagnétiques avec les milieux traversés sont diverses :

- Les rayons γ et X sont absorbés en totalité, dans la haute couche atmosphérique, par les molécules H_2 et N_2 ;
- Les rayons UV sont absorbés par la couche d'ozone stratosphérique ;
- Les rayons du visible passent quasiment intégralement à travers l'atmosphère sèche et non polluée. Ils sont partiellement transmis et réfléchis par les nuages et le sol ;
- Les rayons infrarouges sont partiellement transmis et absorbés par l'atmosphère, par les molécules à effet de serre, notamment CO_2 , H_2O et O_3 ;
- Les rayons micro-ondes passent intégralement à travers l'atmosphère et les nuages, mais sont réfléchis par l'eau liquide (pluie).

La figure 3.2 illustre le spectre solaire au sommet de l'atmosphère et le spectre «incident» au niveau de la mer. La figure 3.3 montre le bilan de la transmission atmosphérique.

L'énergie mesurée par les capteurs satellites se situe dans des bandes de longueurs d'onde variées :

- **l'ultraviolet proche et le visible.** L'énergie provient de la réflexion du rayonnement solaire par les nuages, les aérosols et le sol ;
- **le proche infrarouge (solaire).** L'énergie provient de la réflexion du rayonnement non absorbé par l'atmosphère ;
- **l'infrarouge (terrestre).** L'énergie provient de l'émission propre après transmission dans l'atmosphère.

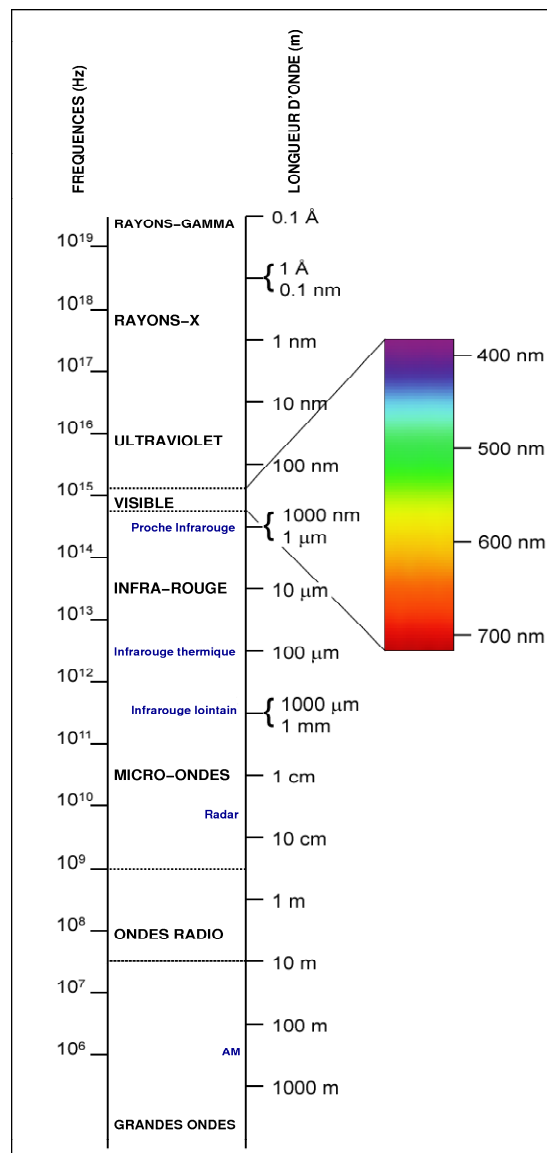


FIG. 3.1 – Spectre électromagnétique (Source : Wikimedia Commons).

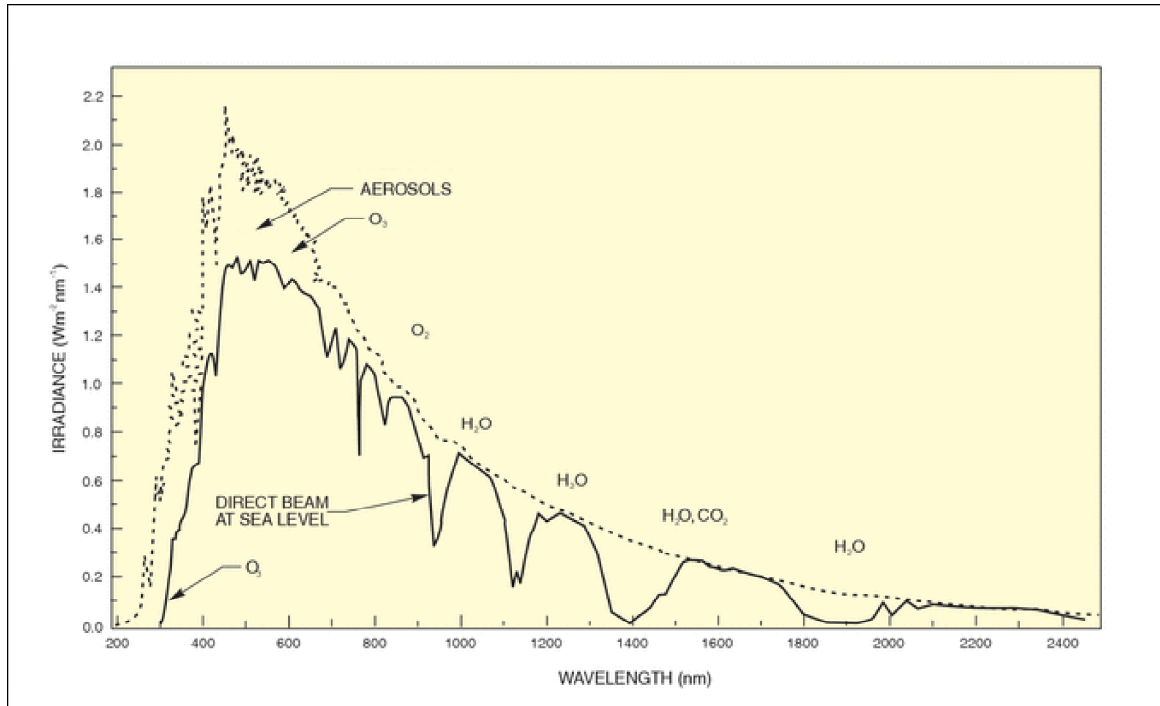


Fig. 3.2 – Spectre solaire incident au niveau de la mer par temps clair. La ligne en pointillé illustre le spectre au sommet de l’atmosphère (Source : Newport Corporation).

3.2.2 Capteurs passifs

Les capteurs passifs sont caractérisés par leur dépendance vis-à-vis des sources extérieures de rayonnement électromagnétique, comme schématisé sur la figure 3.4(a). Ils n’ont pas besoin d’apport d’énergie extérieure pour la mesure. Les capteurs passifs peuvent être **optique**, **thermique** ou d’**hyperfréquence**. Les capteurs passifs **optiques** sont des dispositifs qui détectent et comptabilisent les photons d’un rayonnement électromagnétique dans la bande spectrale solaire (longueurs d’onde de $0,2 \mu\text{m}$ à environ $3 \mu\text{m}$). Les capteurs passifs **thermiques** mesurent une énergie dans la bande de l’infrarouge thermique (environ $3 \mu\text{m}$ à 1mm). Les **capteurs passifs d’hyperfréquence** détectent une énergie dans la bande des micro-ondes (1 à 10cm). Ces longueurs d’onde sont grandes par rapport à celles du visible et de l’infrarouge et sont très peu sensibles à la diffusion atmosphérique, qui affecte les ondes les plus courtes. Elles passent au travers de la couche nuageuse, la poussière et la pluie fine. Pour cette raison, ces ondes permettent la détection dans presque toutes les conditions atmosphériques. En revanche, du fait des grandes valeurs de longueurs d’onde, l’énergie disponible dans cette bande passante est très faible devant celles du visible et de l’infrarouge. Le champ de vision des capteurs à hyperfréquence doit donc être grand, afin de détecter assez d’énergie pour enregistrer un signal. Ces capteurs sont donc caractérisés par une résolution spatiale faible.

La transmission atmosphérique en fonction des longueurs d’onde est illustrée sur la figure 3.5. Dans la bande passante du visible, de l’infrarouge thermique et des micro-ondes, la transmission est élevée.

3.2. Capteurs satellite

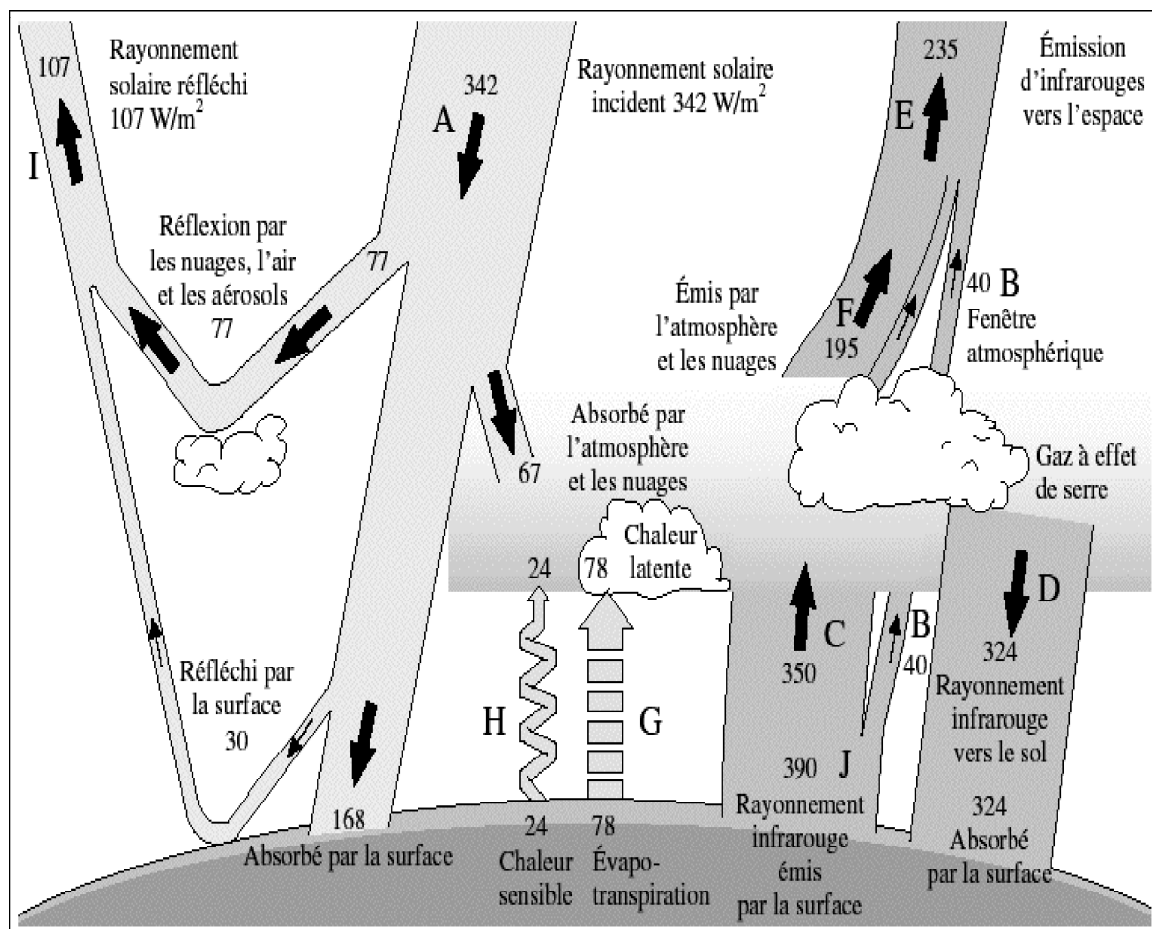


Fig. 3.3 – Bilan radiatif simplifié de l'atmosphère. Les chiffres représentent la valeur moyenne, temporelle (sur une année) et géographique (sur la surface de la planète) en Watts par mètre carré, de chaque flux d'énergie représenté. Le rayonnement solaire incident (342 W.m^{-2}) est égal au quart de la constante solaire (1367 W.m^{-2}), car il intègre les effets jour-nuit et la surface du globe éclairée (Source : IPCC Third Assessment Report).

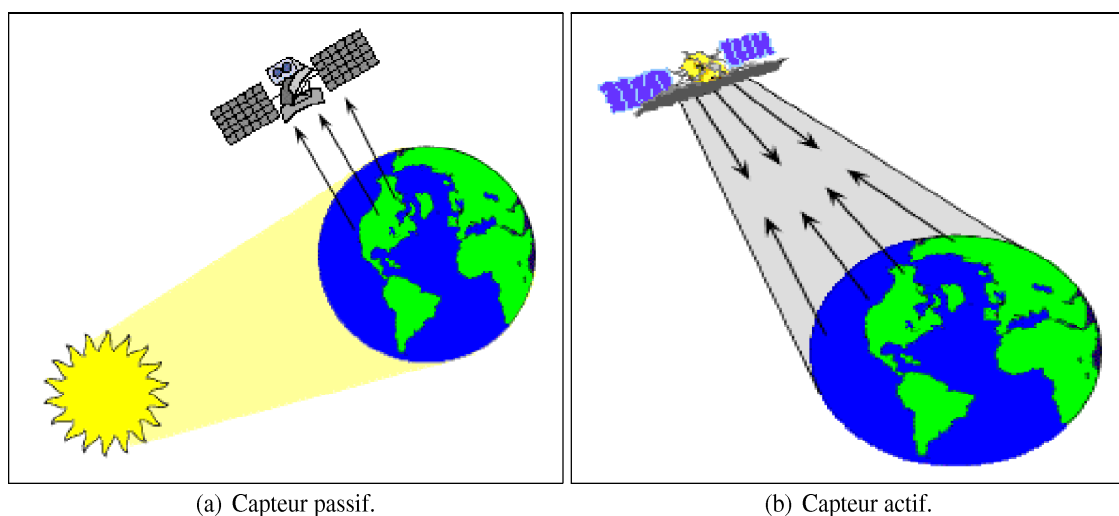


Fig. 3.4 – Capteurs passif et actif (Source : Centre canadien de télédétection).

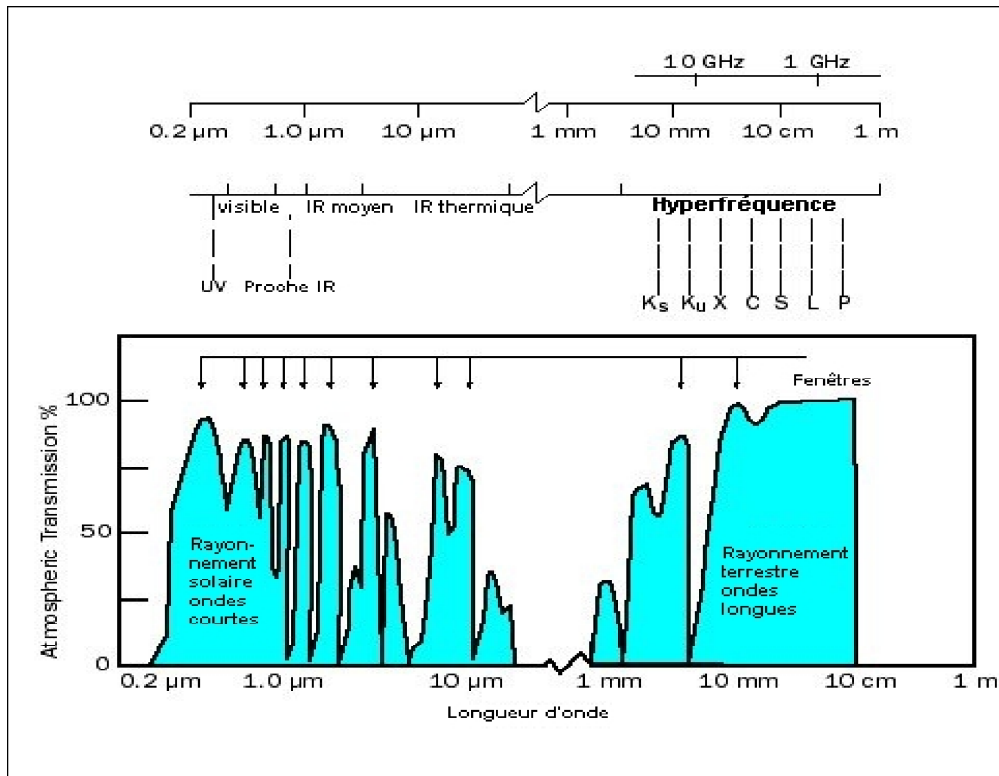


FIG. 3.5 – Indice de transmission atmosphérique en fonction des longueurs d'onde (Source : Organisation Météorologique Mondiale).

3.2.3 Capteurs actifs

Les capteurs actifs sont autonomes vis-à-vis des sources de rayonnement extérieur, ils produisent leur propre rayonnement électromagnétique pour illuminer la cible. Le rayonnement réfléchi par celle-ci est alors perçu et mesuré par le capteur, comme illustré sur la figure 3.4(b). Les capteurs actifs ont l'avantage de pouvoir prendre des mesures à n'importe quel moment de la journée. Plusieurs catégories de capteurs actifs existent, ce sont les **LIDAR** et les **hyperfréquences actives**, que nous présentons brièvement.

3.2.3.1 Hyperfréquences actives

On distingue, dans cette catégorie, les **radar imageurs** des **radar non-imageurs**. Le mot radar est un néologisme provenant de l'acronyme anglais : RAdio Detection And Ranging, que l'on peut traduire par «détection et estimation de la distance par ondes radio».

3.3. Océanographie

- **Radar non imageur :**

Le capteur non-imageur ne fournit pas d'image comme son nom l'indique. Il trace le profil de la cible visée dans une seule dimension. Ce type de capteur est un altimètre ou un diffusomètre. Un altimètre émet des impulsions d'énergie vers la surface de la Terre, dont une partie est réfléchie et revient sous la forme d'un signal d'écho. Le retard de l'écho renseigne sur la distance par rapport à la surface réfléchissante, par exemple la surface de la mer. L'altimètre radar est utilisé à la fois à bord des avions et des satellites. Un diffusomètre mesure la puissance de l'écho. La quantité d'énergie rétrodiffusée dépend des propriétés de la surface - telles que la rugosité, le degré d'humidité - et de l'angle de contact des ondes avec la cible. Les mesures de diffusion au-dessus des océans peuvent ainsi être utilisées pour estimer les vents, en se basant sur la rugosité de la surface de la mer.

- **Radar imageur :**

Le capteur imageur restitue, sous la forme d'une image, les observations effectuées dans une zone visée. L'antenne de ce radar est fixée sur une face latérale du porteur, avion ou satellite, et acquiert par ligne perpendiculaire (la fauchée) au déplacement des informations relatives à l'amplitude et au déphasage de l'écho. La résolution le long de la fauchée est liée à la taille de l'antenne. Une forte résolution nécessite une très grande antenne. Un traitement numérique des données permet de simuler des émissions de grandes antennes : c'est la synthèse d'ouverture. On parle alors de **RSO** (radar à Synthèse d'Ouverture) ou **SAR** (Synthetic Aperture Radar).

Le **radar RSO** sert essentiellement à mesurer des distances et à générer des cartes de réflectivité d'une scène. En cas d'acquisitions multiples, on parle alors de **radar RSO** interférométrique. Dans ce cas, on utilise simultanément deux radars à Synthèse d'Ouverture, ou le même radar à des instants différents, afin d'étudier les différences de phase du signal reçu. Les **radars RSO** interférométriques sont notamment utilisés pour établir des cartes de vitesse des courants de surface de l'océan.

3.2.3.2 LIDAR

La spécificité des capteurs **LIDAR** (Light Detection and Ranging) est la source laser. Laser est l'acronyme anglais de «Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation», qui peut se traduire par «amplification de la lumière par émission stimulée de radiations». Le laser est un générateur de lumière cohérente : les ondes électromagnétiques générées sont monochromatiques, et permettent de mesurer avec précision la distribution en concentrations des objets diffusant étudiés (par exemple, la rétrodiffusion des particules atmosphériques, afin de déterminer les propriétés des aérosols et des nuages pour l'étude de la pollution atmosphérique). Le capteur **LIDAR** fournit des mesures ponctuelles. Sa principale limitation est le besoin important en énergie pour réaliser des acquisitions. Par conséquent, la technologie **LIDAR** est peu utilisée en télédétection spatiale.

3.3 Océanographie

De nombreux satellites sont chargés d'effectuer des mesures de l'océan. Les capteurs de ces satellites acquièrent des données dans plusieurs canaux de différentes bandes passantes,

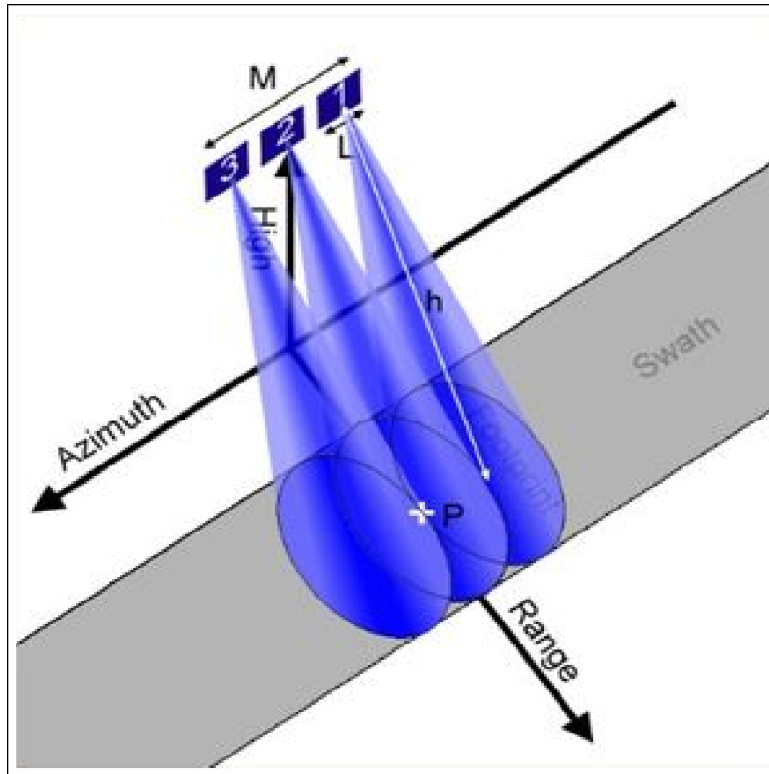


FIG. 3.6 – Principe de fonctionnement du **RSO**. Le point *P* est illuminé plusieurs fois par le radar en mouvement.

couvrant ainsi le spectre des longueurs d'onde d'intérêt pour l'étude des différents phénomènes océanographiques. Nous présentons, dans les sous-sections suivantes, les données obtenues par de tels capteurs.

3.3.1 Température de Surface

Les mesures de Température de Surface de l'océan, ou SST (Sea Surface Temperature), sont importantes pour plusieurs raisons. Les courants profonds des océans transportent, autour de la planète, d'énormes quantités d'énergie thermique. Les modifications de ces courants sont liées aux changements climatiques à l'échelle planétaire. Les Températures de Surface sont donc un moyen de suivre cette contribution au climat mondial. En outre, elles appartiennent aux variables d'états des modèles de prévision climatique, et sont essentielles pour le couplage des modèles océanographiques et météorologiques. Les mesures de Températures de Surface sont effectuées par des capteurs satellite océanographiques acquérant des mesures dans les bandes spectrales infrarouges et hyperfréquences.

3.3.1.1 Acquisition par capteur passif infrarouge thermique

L'obtention de mesures SST par des capteurs satellite dans la bande de fréquences proche infrarouge - autour de $3.7 \mu\text{m}$ - et/ou Infrarouge thermique - autour de $10 \mu\text{m}$ - se fait en trois étapes (les paramètres de calibration étant propres au satellite considéré) :

1. **Correction géométrique.** Dans un premier temps, les données sont corrigées géométriquement et les continents masqués. La bande spectrale infrarouge étant sensible à la pré-

3.3. Océanographie

sence de nuages, d'aérosols et de vapeur d'eau dans l'atmosphère, les mesures peuvent uniquement être exploitées par temps clair. Pour cette raison, les données sont souvent des images composites prises à différents instants, afin d'obtenir de l'information dans des zones géographiques larges, sans nuage.

2. **Correction radiométrique.** Le signal brut, enregistré par le satellite, est ensuite converti en une variable physique : la radiance, mesure de l'énergie rayonnée par un objet. La conversion se fait soit en tenant compte de données de référence de la surface, soit par des données fournies par le **NCEP** (National Center for Environmental Prevision), soit par des radiosondes, ou soit par auto-calibration, de manière automatique, à bord du satellite.
3. **Conversion des données de radiance en Températures de Surface.** Le modèle du «corps noir» est utilisé pour représenter le rayonnement électromagnétique (infrarouge, visible) d'un objet en fonction de sa température T (en degrés Kelvin). Un corps noir est défini comme un objet idéal, qui absorberait la totalité du rayonnement électromagnétique auquel il est soumis, sans en réfléchir ou en transmettre une partie. Dans ces conditions, le corps noir convertit toute son énergie interne en rayonnement thermique. La distribution du rayonnement du corps noir, en fonction de la température, est définie par la loi de Planck :

$$L_\lambda = B_\lambda(T) = \frac{c_1}{\lambda^5 (e^{c_2/\lambda T} - 1)}, \quad (3.1)$$

où L_λ , avec $[L_\lambda] = W.m^{-3}.sr^{-1}$, est la radiance spectrale, c'est-à-dire le flux de radiations émises. c_1 et c_2 sont des constantes et λ est la longueur d'onde. Les «corps noir» vérifient deux propriétés importantes :

- **La loi de Stefan-Boltzmann**, qui établit que l'énergie radiative totale émise est proportionnelle à T^4 :

$$\int_0^\infty L_\lambda d\lambda \propto T^4. \quad (3.2)$$

C'est-à-dire que plus un corps est chaud, plus il émet.

- **La loi du déplacement de Wien**, qui stipule que la longueur d'onde λ_{max} , pour laquelle L_λ est maximale, est proportionnelle à $1/T$:

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{4,9651 \cdot kT} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{T}, \quad (3.3)$$

où h est la constante de Planck, k est la constante de Boltzmann, et c est la vitesse de la lumière. Cette loi revient à dire que plus un corps est chaud, plus il émet dans des longueurs d'onde courtes donc énergétiques.

A partir de la loi de Planck (équation (3.1)), il est possible d'obtenir des valeurs de température en fonction du rayonnement :

$$T = \frac{c_2}{\lambda \ln \left(\frac{c_1}{\lambda^5 L_\lambda} + 1 \right)}. \quad (3.4)$$

Notons qu'un «corps noir» est un objet idéal, qui n'existe pas dans la réalité. Dans la nature, les corps réfléchissent une partie de l'énergie électromagnétique qu'ils reçoivent et en transmettent une autre partie : on les appelle des corps gris. Ils peuvent être caractérisés par leur émissivité ϵ_λ , qui est une mesure de la capacité à absorber et à réémettre l'énergie. L'émissivité est définie comme le rapport de l'énergie rayonnée par un corps gris à une température T et de l'énergie émise par un corps noir à la même température dans une bande passante donnée :

$$\epsilon_\lambda = \frac{L_\lambda}{B_\lambda(T)}, \quad (3.5)$$

où L_λ appelée luminance spectrale. Pour un corps noir, l'émissivité est égale à 1 pour tout λ . Les milieux naturels présentent une émissivité spectrale comprise entre 0 et 1, variable selon λ . L'émissivité est une fonction complexe de la constante diélectrique du milieu et de la longueur d'onde. Elle dépend aussi de la rugosité de la surface, du couvert végétal, de l'humidité et de la Température de la Surface, etc. De plus, en pratique les corps ne rayonnent pas de manière isotrope. En toute rigueur, on devrait écrire la relation (3.5) avec une dépendance en l'angle d'observation θ :

$$L_{\lambda,\theta} = \epsilon_{\lambda,\theta} B_\lambda(T). \quad (3.6)$$

Dans le cas où $\epsilon = 1$, la température de brillance T_λ , pour une longueur d'onde λ , est obtenue en inversant la loi de Planck. Dans le cas où $\epsilon \neq 1$, la température réelle est différente de T_λ . De plus, le rayonnement mesuré contient les contributions de l'atmosphère. Pour calculer la Température de Surface, il faut donc effectuer deux corrections :

- **sur l'émissivité** : dans le domaine infrarouge, le comportement de l'océan est très proche de celui du «corps noir», car son émissivité spectrale moyenne est de l'ordre de 0,95. En supposant que $\epsilon = 1$, on obtient la température de brillance T_λ . Celle-ci exprime une température comprenant les contributions de la surface de l'océan et de l'atmosphère ;
- **sur les contributions atmosphériques** : pour calculer la Température de surface en fonction de L_λ , on utilise des algorithmes permettant d'éliminer les contributions atmosphériques. L'algorithme le plus connu, dit «Split Window» [Price, 1984], consiste à combiner les températures de brillance correspondant à différentes longueurs d'onde.

Quelques capteurs infrarouges permettant d'obtenir des données SST sont présentés dans le tableau 3.1(a). Un exemple d'image SST est illustré sur la figure 3.7.

(a) Capteurs passifs de l'infrarouge thermique embarqués à bord des satellites.

| Capteur | Satellite | Société | Orbite |
|--|-------------|-----------|-----------------|
| AVHRR (Advanced Very High Resolution Radiometer) | POES | NASA/NOAA | polaire |
| ATSR (Along Track Scanning Radiometer) | ERS-2 | ESA | polaire |
| ABI (Advanced Baseline Imager) | GOES | NASA/NOAA | géostationnaire |
| MODIS (Moderate Resolution Imaging Spectroradiometer) | Terra, Aqua | NASA | polaire |
| SEVIRI (Spinning Enhanced Visible and InfraRed Imager) | MSG | EUMETSAT | géostationnaire |

(b) Capteurs passifs d'hyperfréquences embarqués à bord des satellites.

| Capteur | Satellite | Société | Orbite |
|---|-----------|-----------|------------------------|
| SMMR (Scanning Multichannel Microwave Radiometer) | Nimbus-7 | NASA | héliosynchrone |
| TMI (Tropical Microwave Imager) | TRMM | NASA/JAXA | basse inclinée à 35° |
| AMSR (Advanced Microwave Scanning Radiometer) | Aqua | NASA | polaire héliosynchrone |
| AMSR | ADEOS II | JAXA | héliosynchrone |

(c) Altimètres embarqués à bord des satellites.

| Altimètre | Satellite | Société | Orbite |
|--|----------------|-----------|---------------------------|
| ALT (Dual-Frequency Radar Altimeter) | TOPEX/POSEIDON | NASA/CNES | circulaire inclinée à 66° |
| SSALT (Solid State Altimeter) | | | |
| SSALT | JASON | NASA/CNES | circulaire inclinée à 66° |
| ASAR (Advanced Synthetic Aperture Radar) | ENVISAT | ESA | héliosynchrone |
| SAR (Synthetic Aperture Radar) | ERS-2 | ESA | héliosynchrone |

TAB. 3.1 – Principaux capteurs en télédétection satellitaire.

3.3.1.2 Acquisition par un capteur passif d'hyperfréquence

La mesure de Température de Surface par un capteur passif d'hyperfréquence se fait de la même manière que pour un capteur passif de l'infrarouge thermique. L'avantage du capteur à hyperfréquence est qu'il permet de déterminer la Température de Surface même lorsque la couverture nuageuse est totale, avec toutefois une précision légèrement inférieure et à condition qu'il ne pleuve pas. Pour les grandes longueurs d'onde, lorsque $\lambda \gg c_2/T$, l'exponentielle de l'équation (3.1) peut être approximée :

$$e^{\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right)} \simeq 1 + \frac{c_2}{\lambda T}. \quad (3.7)$$

La fonction de Planck peut être approximée à l'aide de la formule de Rayleigh-Jeans :

$$B_\lambda(T) = \frac{c_1 T}{\lambda^4 c_2}. \quad (3.8)$$

A ces longueurs d'onde, le rayonnement est donc une fonction linéaire de la température, et la luminance spectrale $L_{\Delta\lambda}$ s'écrit :

$$L_{\Delta\lambda} = \epsilon_\lambda B_\lambda(T) = \frac{\epsilon_\lambda c_1 T}{\lambda^4 c_2}. \quad (3.9)$$

Ainsi, les températures de brillance obtenues par les capteurs passifs d'hyperfréquence permettent d'obtenir des informations sur l'émissivité et la température T . Les Températures de Surface déterminées par les techniques d'hyperfréquence dans des zones non homogènes sont très imprécises. On ne les utilise que pour déterminer les Températures de la Surface de la mer, qui sont homogènes. Mais les Températures de Surface, aux abords des terres et de la glace marine, sont fortement contaminées par le bruit. Les principaux capteurs micro-ondes permettant d'obtenir des données SST sont présentés dans le tableau 3.1(b).

3.3.2 Couleur de l'océan

Les organismes photosynthétiques flottants (phytoplancton), la matière organique dissoute et les sédiments affectent la réflectance de la lumière réfléchiée par la couche supérieure de l'océan, par augmentation de l'absorption et de la diffusion. En outre, le phytoplancton influe sur le taux de réchauffement des couches supérieures de l'océan et par conséquent les flux d'oxygène et de CO_2 à l'interface Océan-Atmosphère. En observant la «couleur de l'océan» depuis l'espace, c'est-à-dire le spectre de la lumière diffusée par la surface des mers (voir figure 3.8), la concentration en pigment chlorophylle peut être estimée et sa variabilité spatiale et temporelle peut être étudiée à l'échelle régionale et/ou globale. Cette information est cruciale pour comprendre les écosystèmes marins et l'évaluation des flux d'énergie affectant les chaînes alimentaires. De plus, en raison du comportement du phytoplancton comme traceur passif, la télédétection de la couleur de l'océan peut être utilisée pour décrire des éléments dynamiques des océans, comme les tourbillons ou les méandres des courants.

3.3.3 Niveau de l'océan

Le niveau des océans (ou hauteur de la mer, SSH) peut s'obtenir grâce aux altimètres radar embarqués à bord des satellites (voir tableau 3.1(c)). Ce niveau correspond à la mesure du niveau des océans, à un instant donné, par rapport à une ellipsoïde de référence : une «sphère»

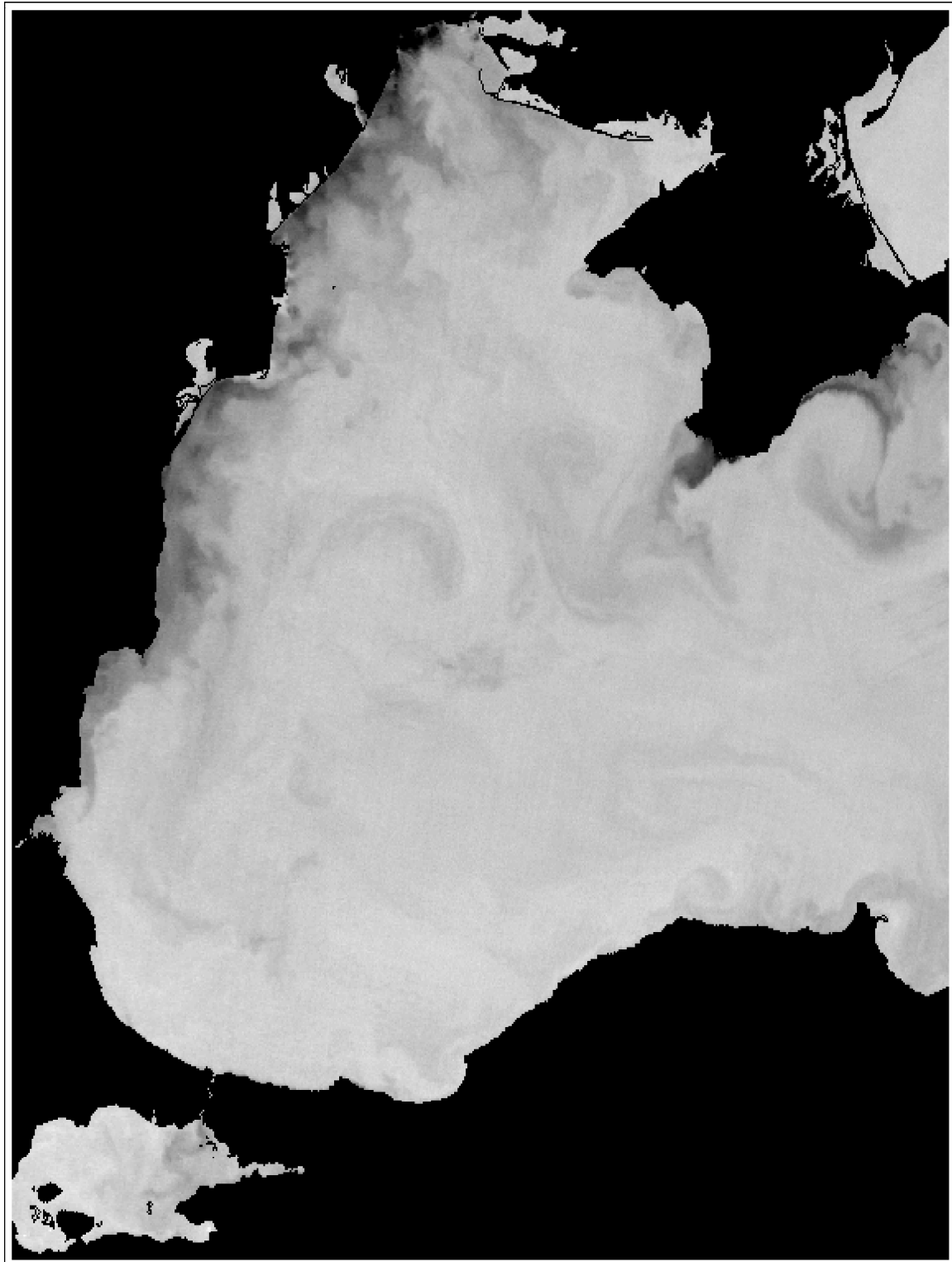


FIG. 3.7 – Mesure de Température de Surface acquise par un capteur passif de l'infrarouge thermique (NOAA) au dessus de la Mer Noire entre 6 et 7 heures GMT. Les températures sont plus élevées dans les zones sombres que dans les zones claires (Source : NOAA. Traitements réalisés par le MHI, Academy of Sciences of the Ukraine).

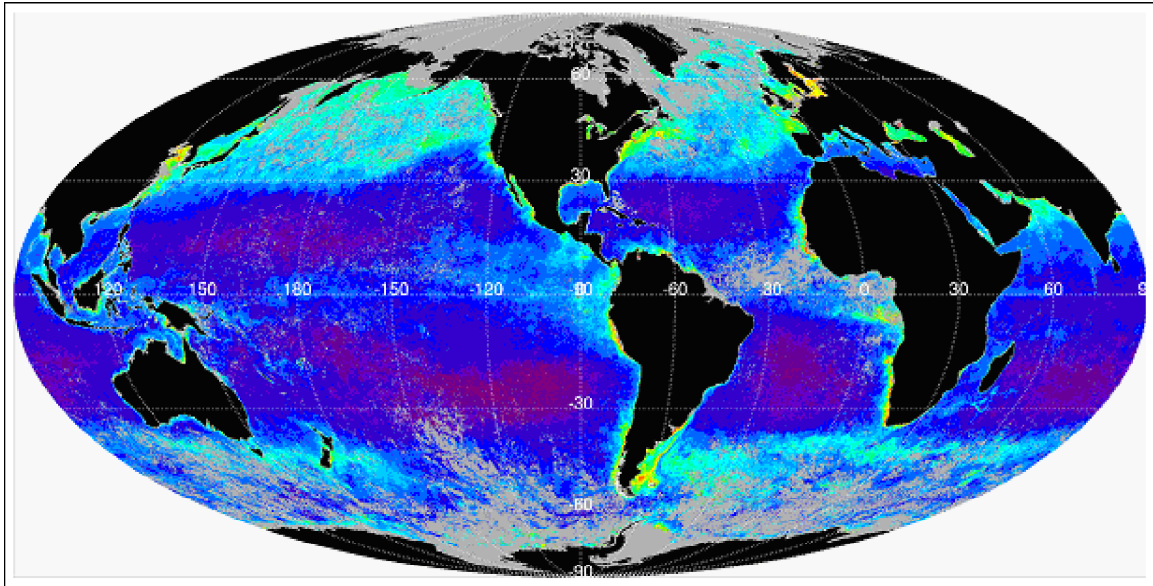


FIG. 3.8 – Distribution globale mensuelle de la concentration en chlorophylle détectée par **POLDER** en Mars 1997. La couleur de l’océan varie d’un bleu profond en eaux pures, à des verts sombres dans les eaux riches en phytoplancton ou à des verts «laiteux» dans les eaux riches en sédiments. (Source : CNES)

aplatie aux deux pôles, approximant la forme du globe terrestre. La profondeur réelle de l’eau n’étant pas connue partout avec précision, cette donnée sert de référence. Le niveau des océans *SSH* s’obtient par simple différence entre l’altitude du satellite *S* et la distance satellite-océan *R* (suivant l’angle de visée) :

$$SSH = S - R. \quad (3.10)$$

Le niveau des océans combine plusieurs informations :

- Le niveau moyen des océans en l’absence de toute perturbation (vent, marée, courant, etc.), qui coïncide avec le géoïde terrestre, c’est-à-dire avec la surface équipotentielle du champ de gravité de la Terre. Les variations du potentiel sont liées aux différences de masse et de densité importantes du sous-sol marin. Par exemple, sur le géoïde, une zone de roches denses «déforme» le niveau de la mer de plusieurs mètres. Cette zone sera représentée par une «bosse» ;
- La circulation océanique, aussi appelée topographie dynamique. Celle-ci comprend une information sur la circulation permanente stationnaire liée à la rotation de la Terre, aux vents permanents, et une information liée à la variabilité des vents, et des marées.

Pour accéder à la seule information de topographie dynamique, il suffit de retrancher la hauteur du géoïde à celle du niveau de la mer *SSH*. En pratique, le géoïde n’étant pas connu avec suffisamment de précision, c’est le niveau moyen de la mer (géoïde plus circulation permanente) qui est retranché à la hauteur *SSH*, donnant ainsi accès à la partie variable du signal océanique.

3.4. Observation météorologique

3.3.4 Applications

Les applications de la télédétection océanographique sont nombreuses. Parmi les plus communes, on peut citer :

- **La prédiction de l'état de la mer.** Prévoir l'état de l'océan, comme on prédit l'état de l'atmosphère, est un thème majeur de l'océanographie. Les changements, parfois brusques, conditionnent les activités maritimes, de navigation mais aussi de pêche, de constructions côtières, d'exploitations offshore. Une meilleure compréhension de l'océan passe en partie par la qualité des observations fournies par les satellites ;
- **La topographie des glaces de mer et des banquises.** Elle permet l'observation des mouvements des glaces de mer et de leur étendue, et l'étude des conséquences du réchauffement climatique ;
- **L'amélioration de la connaissance des marées.** Les marées peuvent affecter de manière importante le niveau des mers. Près des côtes, les variations du niveau de la mer sont de quelques mètres. En plein océan, ces variations sont loin d'être négligeables. L'étude des marées permet de mieux connaître les interactions entre la Terre et la Lune, comme les effets de la Lune sur la durée du jour terrestre. Enfin, la dissipation d'énergie due aux marées pourrait être un des moteurs de la circulation thermohaline (température et salinité) et donc de l'équilibre climatique de la planète ;
- **La mesure de l'effet de serre.** Le niveau moyen des océans, des lacs et des mers fermées fournit une information sur l'effet de serre. L'océan absorbe 30% du gaz carbonique de l'atmosphère. Connaître la circulation océanique permet de contribuer à l'étude de l'accroissement de l'effet de serre, effet dû à l'augmentation de la concentration de ce gaz dans l'atmosphère ;
- **La surveillance écologique des lacs.** Le niveau d'eau des grands lacs américains ou africains varie au fil des saisons. Les mers fermées, comme la mer d'Aral et la mer Caspienne, connaissent des problèmes écologiques. La surveillance continue de ces étendues d'eau est donc de grande importance ;
- **La cartographie des courants.** L'observation de la circulation océanique et de ses variations permet de tracer des cartes de courants, et de leurs variations de géodésie. L'altimétrie permet d'obtenir des informations sur le relief sous-marin, ce qui permet de voir les failles existantes entre les différentes plaques continentales, et d'évaluer le déplacement de ces plaques.

3.4 Observation météorologique

Les météorologues étudient des phénomènes qui évoluent rapidement : cela va de quelques jours pour certaines structures nuageuses, à quelques heures pour les orages de mousson et les cyclones. Les acquisitions satellite doivent avoir une résolution temporelle fine afin que les mesures permettent de visualiser l'évolution des phénomènes observés. Il y a actuellement quinze satellites météorologiques opérationnels, qui sont soit géostationnaires, soit à orbite polaire (voir figure 3.9).

Un satellite géostationnaire se situe en orbite à 36 000 km d'altitude au dessus de l'équateur. Il est immobile par rapport au référentiel terrestre et observe continuellement la même zone du globe terrestre. Ces satellites sont les mieux adaptés à l'étude des phénomènes rapides, car ils permettent d'observer la Terre avec une fréquence temporelle élevée. Il faut toutefois remarquer que la résolution temporelle d'acquisition des données est limitée de façon intrinsèque par la rotation propre du satellite : le capteur ne peut effectuer une mesure que lorsque qu'il est correctement orienté vers la Terre. Enfin, signalons que l'ensemble des satellites géostationnaires couvre la totalité du globe terrestre, à l'exception cependant des pôles.

Nous présentons dans les sous-sections suivantes les capteurs Météosat de première et seconde génération.

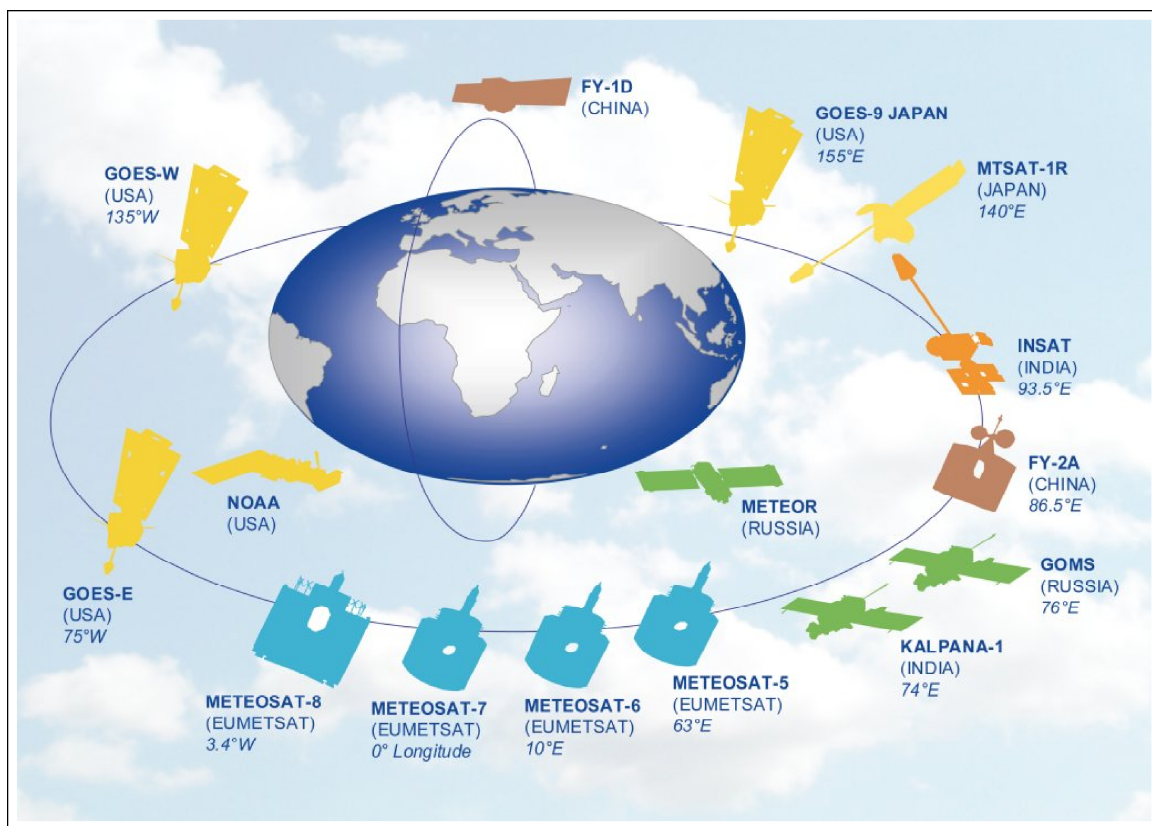


FIG. 3.9 – Les satellites météorologiques en orbite (Source : EUMETSAT).

3.4.1 Capteur Météosat de première génération

Le capteur Météosat **MVIRI** (**Meteosat Visible and InfraRed Imager**) est de type passif. Il acquiert des données dans plusieurs canaux de différentes bandes passantes pour couvrir la bande de longueurs d'onde d'intérêt pour l'étude des phénomènes atmosphériques. Par exemple, Météosat-7, le satellite utilisé pour l'étude, possède 3 capteurs acquérant simultanément dans les canaux appelés «visible», «infrarouge», et «densité de vapeur d'eau» (voir figure 3.10). Ce satellite peut effectuer une mesure toutes les 30 minutes. Ses caractéristiques sont détaillées dans le tableau 3.2.

3.4. Observation météorologique

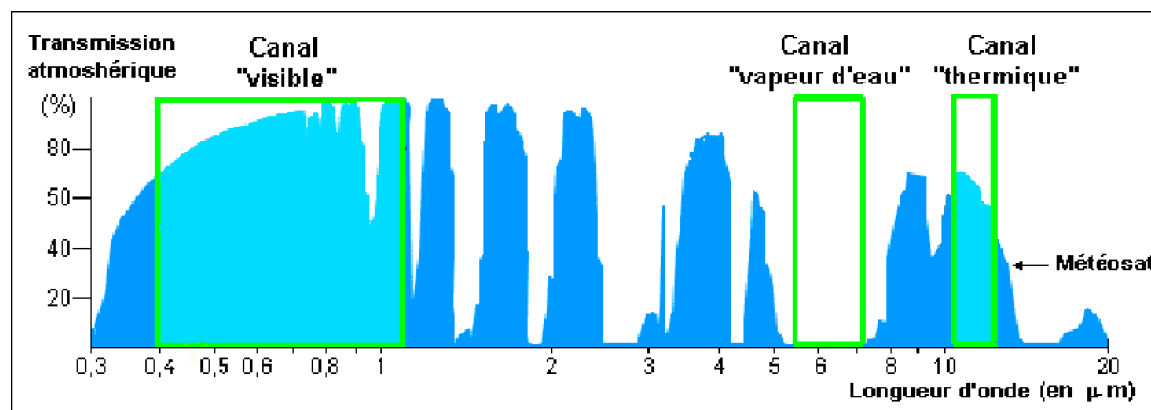


FIG. 3.10 – Bandes spectrales du capteur **MVIRI** et transmission atmosphérique (Source : EUMETSAT).

| Paramètres | Bandes spectrales (en μm) | | |
|-----------------------------------|---------------------------------------|-------------------|-----------------|
| | Visible (VIS) | Vapeur d'eau (WV) | Infrarouge (IR) |
| Longueur d'onde (μm) | 0,4 - 1,1 | 5,7 - 7,1 | 10,5 - 12,5 |
| Résolution spatiale (Km) | 2,5 | 5 | 5 |
| Nombre de lignes par image | 5000 | 2500 | 2500 |
| Nombre de pixels par ligne | 5000 | 2500 | 2500 |
| Champ d'observation (Km) | 12 500 | 12 500 | 12 500 |

TAB. 3.2 – Caractéristiques du capteur MVIRI.

La suite de cette section s'intéresse à la description des différents canaux **MVIRI** et au potentiel d'observation qu'ils présentent. Cette analyse a pour but de discuter les données acquises pour l'observation des phénomènes étudiés et de nous permettre d'investiguer le potentiel du traitement de l'image.

3.4.1.1 Le canal visible

Ce canal (VIS) mesure le rayonnement électromagnétique dans la bande de fréquences visible (0,4 - 1,1 μm). L'énergie captée provient presque exclusivement de la réflexion des photons en provenance du Soleil, les émissions spontanées étant pratiquement nulles. La réflexion est d'origines diverses : elle peut provenir de la couche nuageuse, de la surface terrestre ou de la surface maritime. L'énergie mesurée dépend fortement de l'angle d'incidence du rayonnement solaire, de la direction de visée du capteur et de la nature spéculaire ou non de la cible. L'inconvénient majeur de ce type de capteur est qu'il acquiert dans la bande spectrale du visible et ne peut donc être utilisé la nuit, car l'image correspond alors uniquement au rayonnement de la Terre, négligeable. Pour cette raison, les plages horaires d'acquisition exploitables sont d'environ une dizaine d'heures dans la journée (en moyenne sur l'année).

La figure 3.11 présente un exemple d'image Météosat dans le canal visible. Cette image permet une bonne visualisation des nuages épais (les plus bas).

3.4.1.2 Le canal «Infrarouge Thermique»

Le canal infrarouge (ou canal IR) mesure le rayonnement électromagnétique dans la bande de fréquences 10,5 μm à 12,5 μm . Ce rayonnement résulte de l'émission propre des cibles : sol,

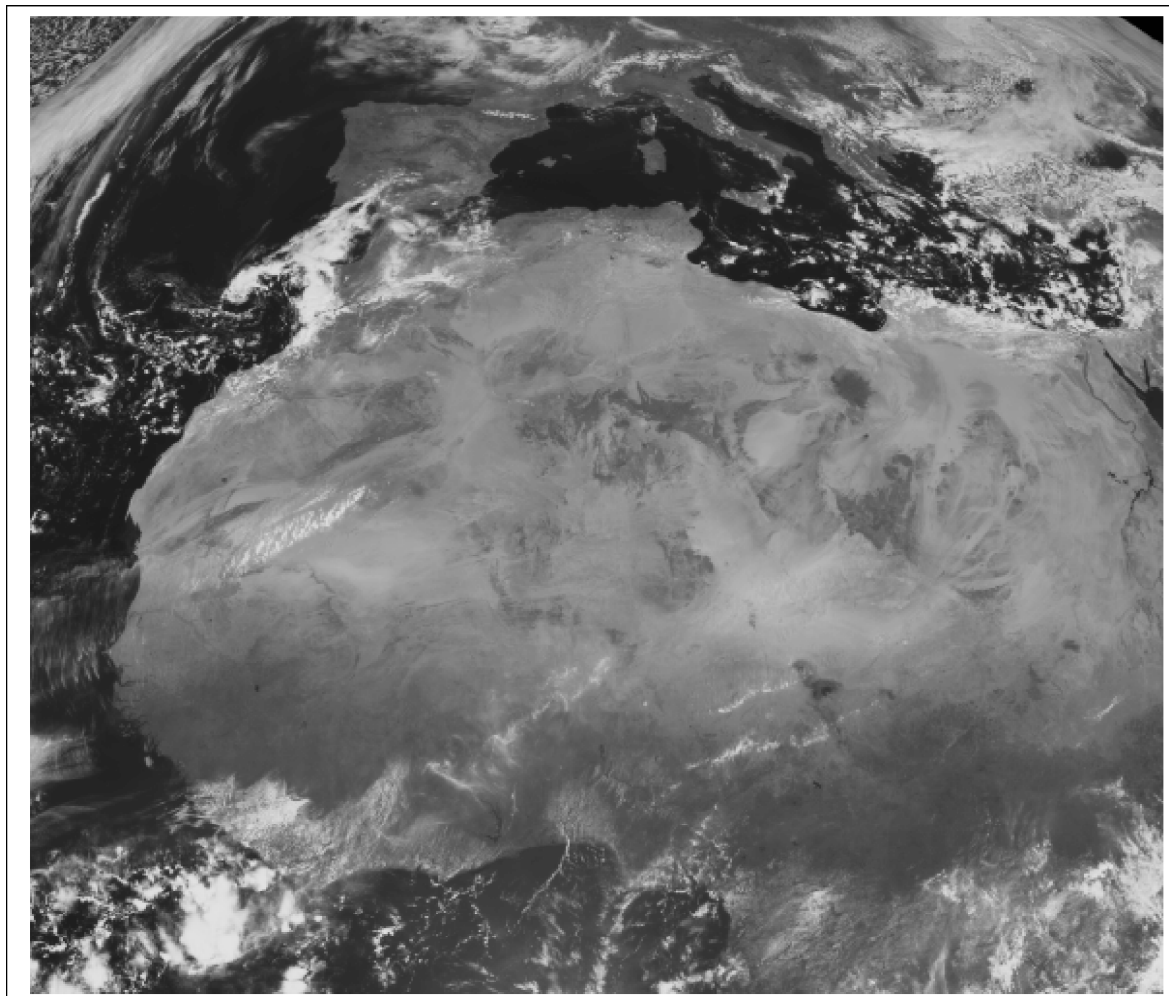


FIG. 3.11 – Exemple d'image dans le canal visible (Source : EUMETSAT).

3.4. Observation météorologique

mer et nuages (l'atmosphère étant quasi-transparente dans ce canal). L'énergie mesurée peut être convertie en température de brillance par la loi de Planck sur le rayonnement d'un corps noir à une température T (section 3.3.1). Sur ce canal, les nuages les plus froids sont les moins énergétiques et apparaissent en foncé sur l'image, allant jusqu'au noir (voir figure 3.12). Par ailleurs, la température permet de distinguer les nuages de faible (nuages froids) ou de forte altitude (nuages chauds). Ce renseignement est précieux pour les météorologues.

On s'aperçoit que le rayonnement infrarouge interagit peu avec l'atmosphère, hormis sur les nuages. D'autre part, la contribution des émissions solaires réfléchies par la Terre est négligeable. La mesure obtenue est donc directement liée à l'émission infrarouge des structures observées sur les données. En d'autres termes, la mesure effectuée correspond bien à la température des points observés : nuage, sol ou surface de l'océan. Signalons enfin que les images infrarouges sont fréquemment présentées en « négatif » pour une question de cohérence avec les images du visible : les nuages apparaissent alors en blanc.

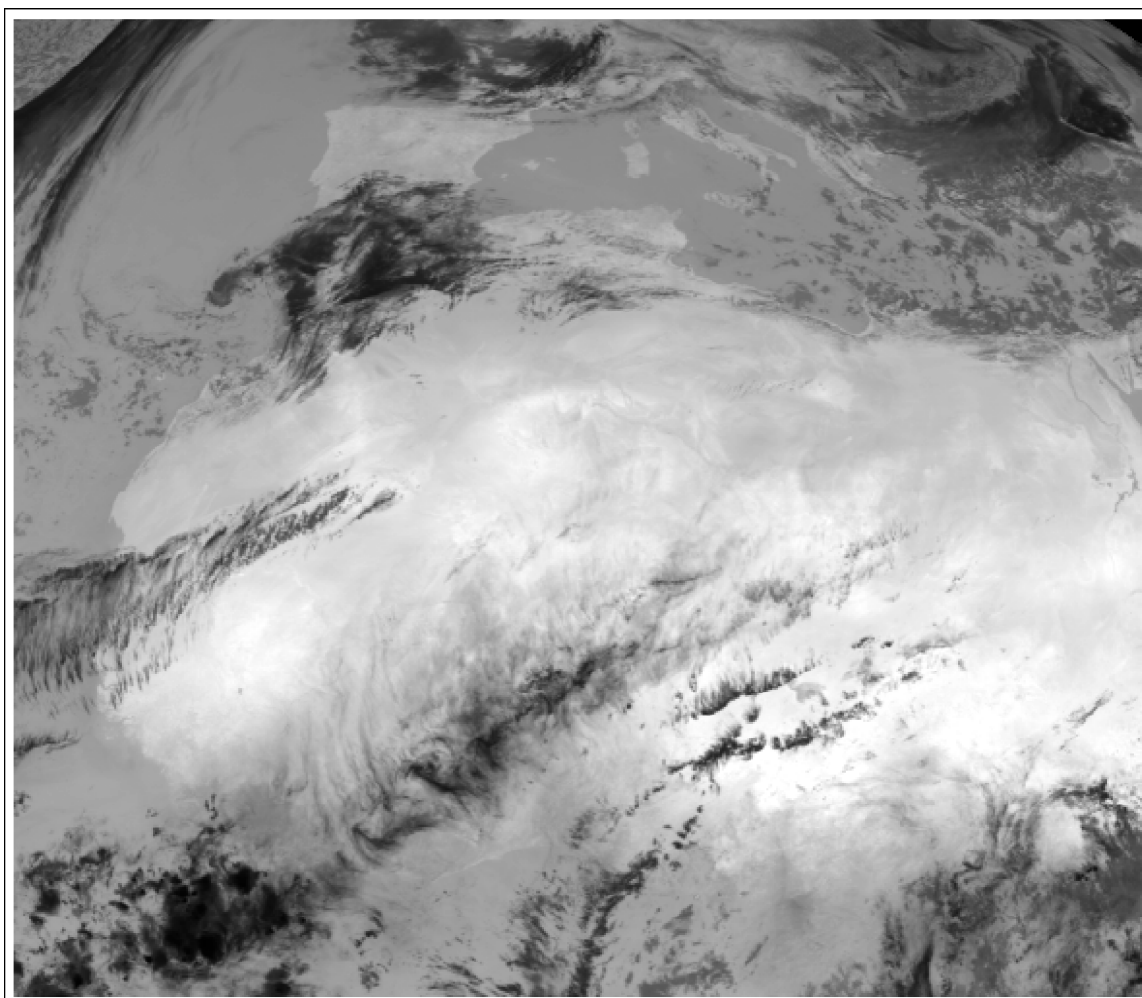


FIG. 3.12 – Exemple d'image dans le canal infrarouge (Source : EUMETSAT).

3.4.1.3 Le canal «vapeur d'eau»

Le canal vapeur d'eau (ou canal WV) se situe dans l'infrarouge, plus précisément dans la bande de longueurs d'onde d'absorption des molécules d'eau ($5.7\mu m$ à $7.1\mu m$). Physiquement,

il mesure les rayonnements, émis par le sol et l'atmosphère, absorbés par les molécules d'eau en suspension dans l'atmosphère. Ce type d'acquisition permet d'observer l'humidité de l'air et les nuages de basse altitude, car ceux-ci sont épais et chargés en vapeur d'eau. Les nuages les plus élevés en altitude sont généralement moins épais car composés d'eau à l'état solide (glace) : ils émettent moins d'énergie sur ce canal, et ne sont plus visibles.

La figure 3.13 illustre l'acquisition vapeur d'eau correspondant dans le temps et dans l'espace à l'acquisition dans l'infrarouge de la figure 3.12 et dans le visible de la figure 3.11.

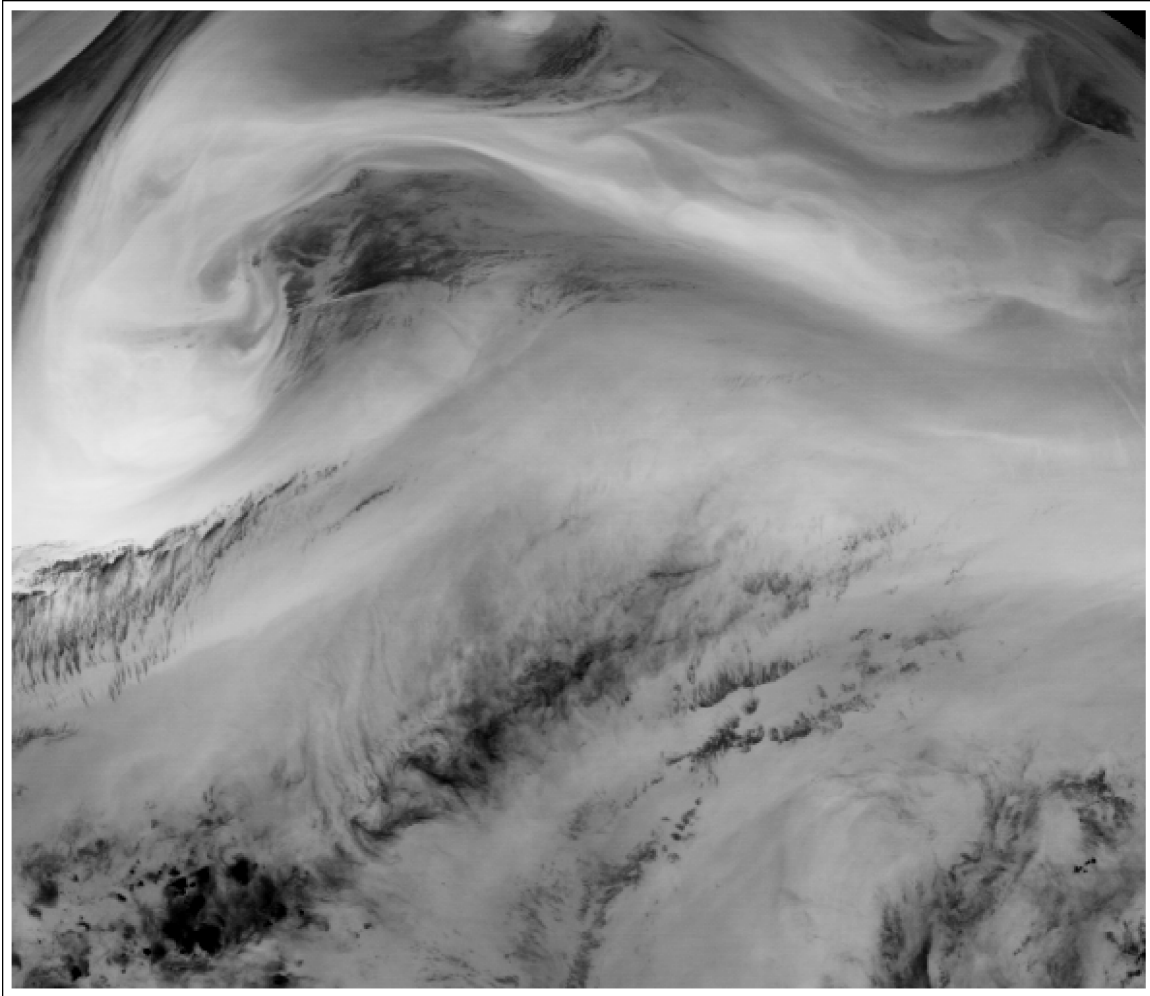


FIG. 3.13 – Exemple d'image dans le canal densité de vapeur d'eau (Source : EUMETSAT).

3.4.2 Capteur Météosat de seconde génération

Le capteur Météosat de seconde génération **SEVIRI** (**Spinning Enhanced Visible and Infra-Red Imager**) peut transmettre une scène enregistrée dans 12 canaux du visible, de l'infrarouge moyen et de l'infrarouge thermique, toutes les 15 minutes, avec une haute résolution spatiale (3 Km pour les canaux infrarouge et vapeur d'eau et 1 km pour le canal du visible). Le premier satellite équipé du capteur **SEVIRI** a été lancé en 2002, c'est le satellite Météosat-8. Ses caractéristiques sont décrites dans le tableau 3.3.

3.4. Observation météorologique

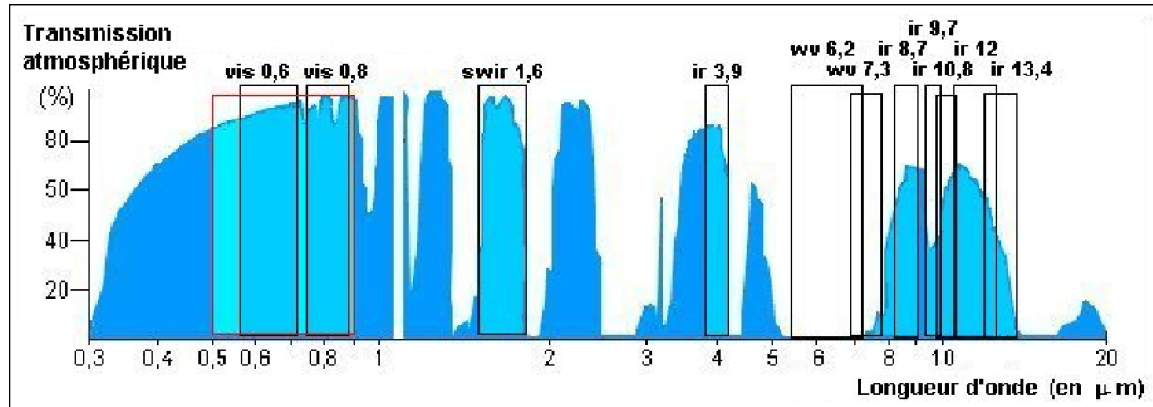


FIG. 3.14 – Bandes spectrales du capteur **SEVIRI** et transmission atmosphérique (Source EUMETSAT).

| - | Canal | Longueur d'onde (μm) | Résolution spatiale (Km) | Champ d'observation (Km) |
|-------------------|---------|-----------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Bandes spectrales | HRV | 0,5-0,9 | 1 | 12500 |
| | VIS 0,6 | 0,6-0,7 | 3 | 12500 |
| | VIS 0,8 | 0,7-0,9 | 3 | 12500 |
| | SWIR | 1,5-1,8 | 3 | 12500 |
| | IR 3,9 | 3,5-4,4 | 3 | 12500 |
| | WV 6,2 | 5,3-7,1 | 3 | 12500 |
| | WV 7,3 | 6,8-7,9 | 3 | 12500 |
| | IR 8,7 | 8,3-9,1 | 3 | 12500 |
| | IR 9,7 | 9,4-9,9 | 3 | 12500 |
| | IR 10,8 | 9,8-11,8 | 3 | 12500 |
| | IR 12 | 11-13 | 3 | 12500 |
| | IR 13,4 | 12,4-14 | 3 | 12500 |

TAB. 3.3 – Caractéristiques du radiomètre SEVIRI.

3.4.3 Applications

Les applications des données satellite météorologiques sont variées. Les plus connues sont :

- **La prévision opérationnelle.** Les modèles météorologiques, ou modèles numériques opérationnels, permettent de prévoir à court terme la température, le vent, la pression atmosphérique ainsi que les précipitations à partir des mesures de paramètres météorologiques. Les données issues de la télédétection par satellite peuvent servir à améliorer les résultats de ces modèles ;
- **La prévision météorologique civile et militaire.** Les avertissements météorologiques (tsunami, cyclone,...), les prévisions destinées aux utilisateurs de la marine et de l'aéronautique ;
- **La cartographie des zones à risque.** Les données de suivi de pluies permettent d'établir des cartes de risque de sécheresse pour les régions arides (Sahel, ...) ;
- **La science des écosystèmes.** Les données des satellites météorologiques sont assimilées dans des modèles de prévision environnementale. On peut ainsi faire des études sur l'environnement, la variabilité climatique, l'ozone au sol, les polluants atmosphériques dangereux, les rayonnements UV-B ;
- **L'agrométéorologie.** La qualité et la quantité des produits de l'agriculture, de l'horticulture, de la sylviculture et de l'élevage sont étroitement dépendantes de facteurs météorologiques, climatologiques et hydrologiques. Les satellites météorologiques permettent d'étudier l'action de ces facteurs en vue d'améliorer la gestion des exploitations agricoles et les conditions de développement du milieu rural : estimation des récoltes, de la sécheresse ;
- **La collecte de données.** Certains satellites météorologiques sont aussi utilisés pour localiser des émetteurs d'ondes radio décimétriques, des ondes allant de 300 Mhz à 3000 MHz (type balises Argos, qui peuvent être apparentées aux systèmes de positionnement par satellite tels que le **GPS**), n'importe où à la surface de la Terre avec une précision d'environ 150 mètres. En équipant certains animaux (albatros, manchot, baleine, caribou) de tels émetteurs, les biologistes peuvent étudier les déplacements de ces animaux, sur terre, en mer ou dans les airs. Ainsi, il est possible de déterminer les migrations avec précision.

3.5 Conclusion

Nous avons présenté, dans ce chapitre, les principaux capteurs satellite utilisés en télédétection océanographique et météorologique. Ces capteurs sont nombreux et opèrent dans des bandes spectrales sélectionnées selon les phénomènes étudiés. En océanographie, ils fournissent des mesures de niveau, de température de surface, de couleur de l'océan, de champs de vent à la surface de la mer. En météorologie, ils permettent d'observer la couverture nuageuse dans de larges zones géographiques et des phénomènes variant rapidement : orage, forte pluie, cyclone. Les applications de la télédétection sont variées, elles peuvent être, par exemple, l'analyse de la pollution des cours d'eau et des océans, l'étude de la biosphère continentale et

3.5. Conclusion

du couvert végétal, l'observation des phénomènes météorologiques, la surveillance militaire.

Chapitre 4

Estimation du mouvement apparent

Ce chapitre présente un état de l'art des méthodes d'estimation du mouvement apparent en vision par ordinateur. Après avoir posé le problème, nous présentons les principales approches adoptées pour sa résolution, et en particulier dans le cas des fluides. Le chapitre se termine par une description de quelques stratégies multi-échelles. Elles permettent aux modèles de prendre en compte une approche à la fois globale et locale et de faciliter la convergence vers une solution.

4.1 Introduction

Les organismes biologiques dotés d'un système visuel présentent une mobilité étroitement associée à la sensibilité visuelle aux mouvements. Chez les mammifères, les expériences et l'analyse théorique suggèrent que l'analyse du mouvement se fait en quatre étapes [Lorenceanu, 2006] : 1) un pré-traitement correspondant à un filtrage de la distribution spatio-temporelle et chromatique des intensités lumineuses ; 2) une détection locale du mouvement par des Détecteurs Directionnels Sélectifs (DDS), sensibles à la direction du mouvement ; 3) une segmentation impliquant la sélection de signaux locaux ; 4) une mesure globale du mouvement consistant en une combinaison des réponses locales des DDS.

En vision par ordinateur, base de tout système de vision artificielle, le processus de vision se décompose en trois grandes parties : une extraction des attributs de «bas niveau» (couleur, texture, forme, orientation et mouvement des structures de la scène observée), une analyse des attributs (segmentation des objets), et enfin une interprétation de la scène, ayant pour but le passage d'une description structurelle à une description sémantique. Le problème de l'estimation du mouvement fait partie de l'extraction des attributs de «bas niveau». Le calcul se fait à partir d'une séquence d'images acquise par un capteur numérique. D'une manière générale, la fonction de luminance $I(\mathbf{x})$ d'une image 2D de L lignes et C colonnes est une fonction :

$$I : [0, L - 1] \times [0, C - 1] \mapsto [0, M]^p.$$

Si l'image est binaire, alors $(p, M) = (1, 1)$, si l'image est en niveaux de gris, alors $(p, M) = (1, 255)$, si l'image est en couleurs, alors $(p, M) = (3, 255)$ (canal rouge, vert, bleu pour l'espace RVB par exemple). Nous ne discutons ici que du cas des images en niveaux de gris. Une image peut donc être vue comme un signal discret obtenu à partir de l'observation d'un phénomène continu du monde réel : une grille rectangulaire de pixels, dont chacun contient une valeur de niveau de gris, ou de luminance. Nous allons maintenant discuter des stratégies utilisées pour estimer le mouvement apparent entre deux images successives d'une séquence. Les méthodes,

que nous présentons, constituent un panorama non exhaustif, tant le problème de l'estimation du mouvement apparent a été abondamment étudié depuis sa formulation initiale.

4.2 Modélisation du mouvement apparent

Le mouvement apparent est la projection du mouvement réel sur le plan image et résulte, outre du mouvement réel, des modifications d'angle de prise de vue et d'illumination. La plupart des méthodes d'estimation du mouvement apparent se basent sur une **hypothèse de conservation**, au cours du temps, d'une mesure associée au pixel. À partir de cette mesure, on peut formuler des hypothèses sur des invariants photométrique, géométrique, voire statistique de la distribution de la luminance.

4.2.1 Hypothèse fondatrice

Au début des années 1980, une première hypothèse a été émise par Horn et Schunck [Horn et Schunck, 1981] pour des applications en robotique : l'**hypothèse de conservation de la luminance**. Elle consiste à supposer que la luminance $I(\mathbf{x}, t)$ d'un pixel de la scène observée ne varie pas au cours de son déplacement. Soit, en d'autres termes :

$$\frac{dI}{dt} = 0. \quad (4.1)$$

En calculant la dérivée totale de l'expression (4.1), on trouve :

$$\frac{\partial I}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial I}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial I}{\partial t} = 0. \quad (4.2)$$

ou, de manière équivalente :

$$\nabla I \cdot \mathbf{w} + I_t = 0. \quad (4.3)$$

Le vecteur vitesse est défini par $\mathbf{w} = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})^T = (u, v)^T$. $\nabla I = (\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y})^T$ est le gradient spatial et $I_t = \frac{\partial I}{\partial t}$ le gradient temporel de l'image. Dans la suite du document, nous ferons référence à l'équation (4.3) par un acronyme : **ECL (Equation de Conservation de la Luminance)**.

4.2.2 Problème d'ouverture et champ homogène

L'utilisation de l'**ECL** pose deux problèmes bien connus en vision par ordinateur. Ces problèmes ont été formulés en psychophysique pour l'étude de la vision des organismes biologiques. Ils sont le **problème d'ouverture** et le **problème de champ homogène**. Le problème d'ouverture fait état que la seule **ECL** ne permet pas l'estimation d'un vecteur vitesse unique en tout point de l'image. En effet, l'équation de conservation possède deux inconnues, qui sont les composantes u et v du vecteur vitesse \mathbf{w} des points de l'image. Il existe donc une infinité de solutions à cette équation. Seul le déplacement dans la direction du gradient spatial de l'image peut être estimé, c'est-à-dire dans la direction perpendiculaire aux contours :

$$\mathbf{w}_n = -\frac{I_t}{\|\nabla I\|} \cdot \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|}, \quad (4.4)$$

4.2. Modélisation du mouvement apparent

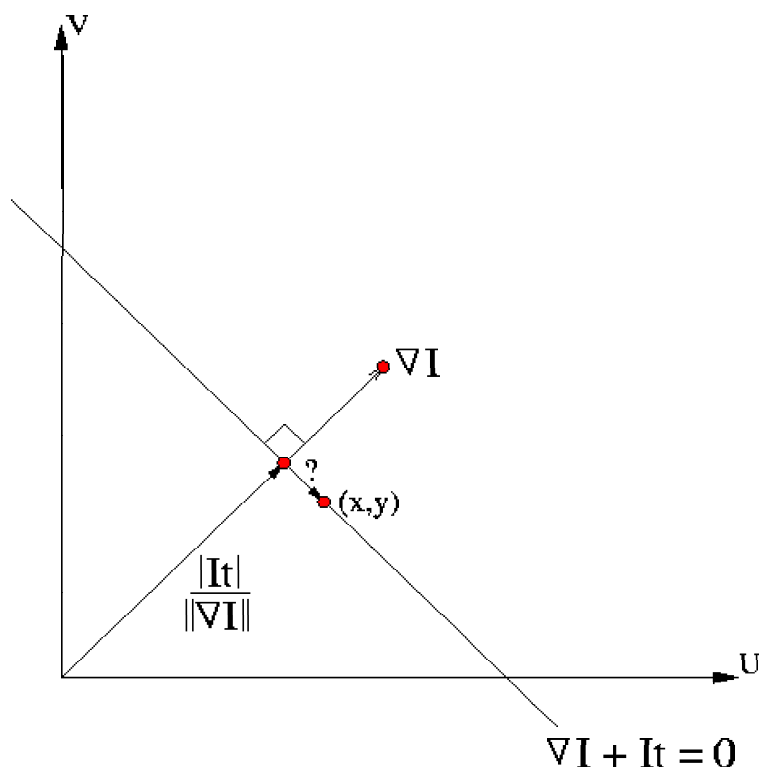


FIG. 4.1 – Le problème d’ouverture : seule la composante parallèle au gradient spatial de l’image peut être estimée avec l’équation de conservation.

où $\frac{\nabla I}{\|\nabla I\|}$ est le vecteur unitaire dans la direction du gradient spatial de l’image (voir figure 4.1).

Par ailleurs, l’équation de conservation est vérifiée mais non exploitable dans les zones de faible contraste de l’image : c’est le **problème de champ homogène**. Dans ces zones (non texturées) de l’image, le gradient spatial est presque nul. Si le gradient temporel est nul, on est dans le cas trivial où $0 = 0$ dans l’ECL. Ainsi, l’information exploitable est inexistante et il est impossible d’estimer le mouvement apparent. Les deux problèmes d’ouverture et de champ homogène sont représentés sur la figure 4.2.

4.2.3 Autres hypothèses de conservation

Notons que l’emploi de l’hypothèse de conservation de la luminance (4.1) n’est pas adapté dans beaucoup d’applications. D’une part, son utilisation repose sur l’hypothèse que la source d’illumination de la scène ne varie pas au cours du temps, ce qui n’est pas toujours vérifié. C’est notamment le cas en imagerie météorologique pour les acquisitions dans la bande de fréquences du visible : des changements d’intensité globaux dans les images surviennent avec la variation de l’angle solaire durant la journée. D’autre part, l’ECL suppose que le mouvement apparent des structures observées soit de divergence nulle, *i.e.* qu’un élément de volume reste constant au cours de son mouvement. Cette hypothèse n’est donc pas adaptée pour des mouvements fluides compressibles. De nombreux auteurs ont formulé d’autres hypothèses traduisant la conservation d’une quantité physique, en fonction du type de mouvement observé - déformable ou rigide - au cours du temps. A titre d’exemple, Schunck [Schunck, 1984] a été

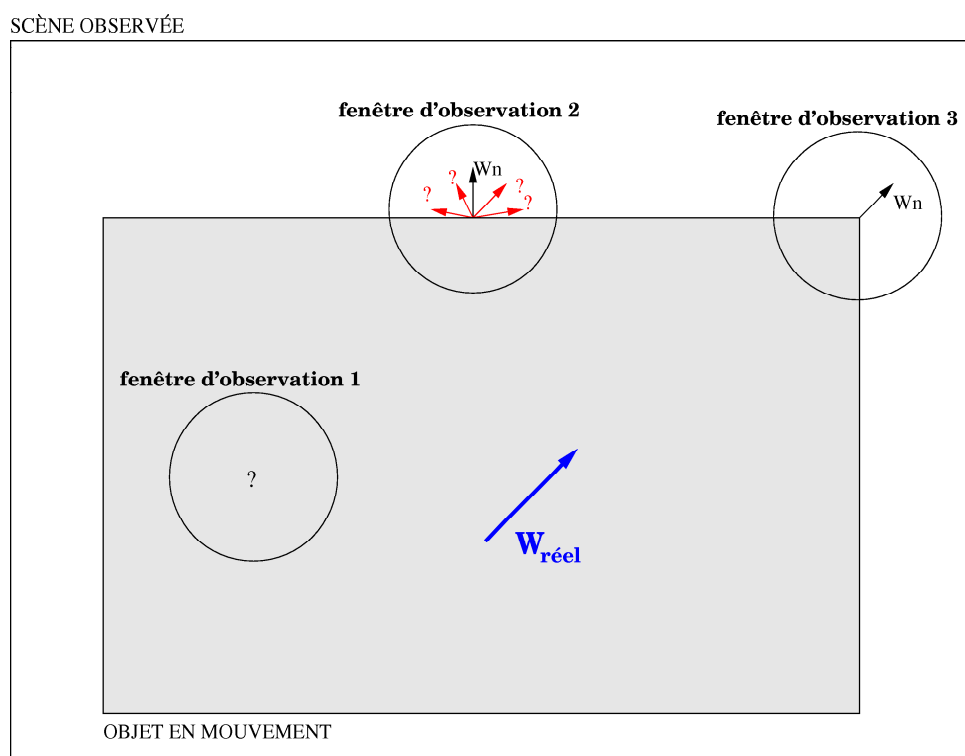


FIG. 4.2 – Problèmes liés à l'estimation du mouvement apparent à partir de l'ECL. A l'intérieur de la fenêtre d'observation 1, on est dans le cas du problème du champ homogène : le contraste est nul et l'objet apparaît immobile. Pourtant, un mouvement $w_{réel}$ existe. Dans la fenêtre d'observation 2, on est dans le cas du problème d'ouverture : le mouvement réel du bord est indéterminé. Sur la fenêtre d'observation 3, la combinaison d'informations locales apportée par les gradients spatiaux de différentes orientations permet d'accéder au mouvement réel.

4.3. Principales approches d'estimation du mouvement apparent

le premier à proposer une équation de conservation de la masse, ou **ECM**, pour l'estimation du mouvement apparent :

$$\frac{dI}{dt} + I \operatorname{div}(\mathbf{w}) = 0. \quad (4.5)$$

En faisant l'analogie entre la luminance et la densité et en considérant un champ de mouvement bidimensionnel, cette équation est la même que l'**ECM** (2.23) utilisée en mécanique des fluides. Cette équation a été exploitée par plusieurs auteurs pour l'estimation du mouvement de fluides compressibles sur des images satellite infrarouges [Béréziat *et al.*, 1999; Corpetti *et al.*, 2002], visibles et infrarouges [Zhou *et al.*,], de transmittance [Wildes et Amabile, 1997; Fitzpatrick, 1988].

L'emploi de l'**ECM** est justifié théoriquement pour des images de transmittance [Fitzpatrick, 1988] et pour des images satellite dans le canal vapeur d'eau [Corpetti *et al.*, 2002], car, sur ces acquisitions, la mesure peut être reliée à une densité. D'autres équations de conservation, basées sur des critères physiques, ont également été formulées par Haussecker [Haussecker, 2000; Haussecker et Fleet, 2001] pour des images infrarouges : équation d'advection-diffusion, transport de la chaleur avec décroissance exponentielle (pour des applications en océanographie), conservation de la luminance avec prise en compte de changements locaux ou globaux d'illumination dans la scène observée.

4.3 Principales approches d'estimation du mouvement apparent

Nous allons maintenant présenter une vue d'ensemble des approches proposées pour résoudre le problème de l'estimation du mouvement apparent, particulièrement dans le cas des fluides. Les méthodes classiques sont présentées dans [Beauchemin et Barron, 1995]. Un comparatif de leurs performances, en terme d'erreur angulaire et en norme, par rapport à des champs de référence est développé dans [Beauchemin *et al.*, 1992]. Le problème de l'estimation du mouvement apparent est généralement abordé suivant deux approches : l'**estimation globale du mouvement**, où le mouvement des structures de la scène observée est modélisé sous la forme d'une transformation géométrique 2D, et l'**estimation locale du mouvement**, où la mesure du mouvement apparent est calculée en tout point de l'image en résolvant une équation de conservation. Les modèles d'estimation locale du mouvement sont la plupart du temps basés sur des dérivées calculées sur l'image. Ils correspondent à une échelle spatiale d'analyse, liée à la taille du support des filtres de dérivation. On a souvent recours à une formulation «multi-échelles», ou «multi-résolutions», afin d'estimer le mouvement comme une somme de mouvements de différentes échelles dans la scène analysée. Presque tous les modèles d'estimation du mouvement local ont ainsi leur déclinaison multi-résolutions ou multi-échelles.

4.3.1 Estimation par mise en correspondance

Les méthodes de mise en correspondance, ou méthodes de *block matching*, sont issues de la stéréovision et ont été développées, en parallèle, en mécanique des fluides (méthodes dites P.I.V). Elles supposent un mouvement rigide (utilisation de l'**ECL**) et un champ localement constant. On calcule le déplacement \mathbf{d} d'un pixel à la position \mathbf{x} d'une image I_0 en cherchant le pixel à la position $\mathbf{x} + \mathbf{d}$, de l'image I_1 , qui lui «ressemble» le plus : c'est-à-dire que la distribution des niveaux de gris d'une fenêtre centrée autour de \mathbf{x} dans I_0 est similaire à celle de la fenêtre centrée autour de $\mathbf{x} + \mathbf{d}$ dans I_1 .

Diverses méthodes existent selon la mesure de similarité des distributions des niveaux de gris

considérée. Par exemple, Anandan [Anandan, 1989] propose d'utiliser la somme pondérée des différences au carré. Dans ce cas, \mathbf{d} réalise le minimum de :

$$\sum_{i=-n}^n \sum_{j=-n}^n W(i, j) (I_0(\mathbf{x} + (i, j)) - I_1(\mathbf{x} + \mathbf{d} + (i, j)))^2 = W(\mathbf{x}) * (I_0(\mathbf{x}) - I_1(\mathbf{x} + \mathbf{d}))^2, \quad (4.6)$$

où les $W(i, j)$ sont des poids à l'intérieur de la fenêtre.

Les méthodes de *block matching* nécessitent de faire un compromis sur le choix de la taille de la fenêtre W : si celle-ci est grande, l'estimation du mouvement est robuste aux faux appariements mais inadaptée aux déformations locales, et inversement.

Les méthodes par corrélation sont utilisées dans les standards de compression vidéo, comme MPEG. Elles ont aussi été utilisées en météorologie pour calculer les vents à partir des nuages [Schmetz *et al.*, 1993; Woick, 1994], en mécanique des fluides expérimentale pour l'analyse d'écoulements [Fayolle, 1996; Fei R., 1999; Fayolle *et al.*, 2000], ainsi que pour des applications spécifiques en imagerie médicale comme le suivi de la surface intérieure du cœur à partir d'images ultrasonores tridimensionnelles (corrélation 3D) [Duan *et al.*, 2005]. Elles sont également utilisées pour la navigation assistée par ordinateur de voitures ou de robots sous-marins [Giachetti *et al.*, 1998].

4.3.2 Estimation par régularisation globale du champ de mouvement

Certains auteurs considèrent une approche globale par régularisation du champ de mouvement. L'ajout d'une équation supplémentaire à l'équation de conservation, une **contrainte de régularité**, permet de lever l'ambiguïté liée au problème d'ouverture et d'obtenir une estimation unique du mouvement en tout point de l'image. La contrainte impose une certaine continuité du champ de mouvement que l'on cherche à estimer, et apporte ainsi une information *a priori*.

La contrainte de régularité classiquement utilisée en vision par ordinateur suppose la continuité spatiale du champ de vecteurs vitesse au sens de la norme \mathcal{L}^2 . Elle est introduite par Tikhonov & Arsenin [Tikhonov, 1963] sous le nom de «ridge regression», et utilisée dans le modèle de Horn et Schunck [Horn et Schunck, 1981] :

$$\int_{\Omega} (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) dx dy, \quad (4.7)$$

où Ω est le domaine image. Remarquons que l'on a la relation :

$$\min \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) dx dy \Leftrightarrow \min \int_{\Omega} (\|\operatorname{div} \mathbf{w}\|^2 + \|\operatorname{rot} \mathbf{w}\|^2) dx dy. \quad (4.8)$$

L'utilisation de la contrainte (4.7) favorise des champs à divergence et rotationnel nuls. De plus, elle lisse de manière isotrope le mouvement aux frontières des objets, faisant ainsi disparaître les discontinuités réelles du mouvement.

4.3.2.1 Formulation variationnelle

Pour calculer le mouvement apparent, on minimise sur toute l'image une fonctionnelle, qui comprend deux termes : un terme quadratique d'attache aux données, portant sur l'hypothèse

4.3. Principales approches d'estimation du mouvement apparent

de conservation, et un second, sur la contrainte de régularité. L'un des deux est pondéré par un facteur constant λ . En choisissant l'hypothèse de conservation de la luminance et la contrainte sur la norme \mathcal{L}^2 , on obtient :

$$E_{HS}(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} (\nabla I \cdot \mathbf{w} + It)^2 dx dy + \lambda \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) dx dy. \quad (4.9)$$

Le minimum de cette fonctionnelle est trouvé en effectuant le calcul des variations. L'équation obtenue, vérifiée par le minimum, est discrétisée puis résolue par des méthodes itératives, de type Gauss-Seidel ou Jacobi (ou autre ...).

4.3.2.2 Autres types de régularisation

La contrainte de régularité (4.7) n'est pas toujours adaptée au type de mouvement que l'on cherche à estimer. Plusieurs auteurs considèrent des contraintes de régularité basées sur d'autres critères que la simple continuité spatiale des vecteurs mouvement. Par exemple :

$$E(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \varphi(\|\nabla u\|) + \varphi(\|\nabla v\|) dx dy, \quad (4.10)$$

où la fonction φ est choisie selon les propriétés recherchées : lissage du bruit, préservation des discontinuités, etc. Cohen [Cohen, 1993; Cohen et Herlin, 1996], Kumar [Kumar *et al.*, 1996] et Dibos [Dibos *et al.*, 2003] considèrent une régularisation avec la norme \mathcal{L}^1 (cas où $\varphi(t) = t$), aussi appelée variation totale ou **TV (Total Variation)** :

$$E_{TV}(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} (|\nabla u| + |\nabla v|) dx dy. \quad (4.11)$$

Deriche, Kornprobst et Aubert [Deriche *et al.*, 1995] définissent φ à l'aide d'estimateurs robustes. Cette approche a également été étudiée par Mémin, Perez et Machecourt [Mémin *et al.*, 1996] dans le cadre d'une modélisation markovienne. Une alternative est proposée par Gupta & Prince [Gupta et Prince, 1996a; Gupta et Prince, 1996b] et Guichard & Rudin [Guichard et Rudin, 1996], qui considèrent une contrainte de régularité basée sur une fonction de la divergence et du rotationnel :

$$E_{DV} = \int_{\Omega} \psi(\text{div}(\mathbf{w}), \text{rot}(\mathbf{w})) dx dy. \quad (4.12)$$

Plusieurs choix sont possibles pour ψ . Rudin considère une régularisation du type :

$$\int_{\Omega} |\text{div}(\mathbf{w})| dx dy, \quad (4.13)$$

pour des objets rigides, dont le mouvement est de divergence nulle. Vigan [Vigan *et al.*, 2000] utilise la contrainte **DR1O (Div-Rot du Premier Ordre)** pour des applications en océanographie :

$$\int_{\Omega} \alpha \|\text{div}(\mathbf{w})\|^2 + \beta \|\text{rot}(\mathbf{w})\|^2 dx dy. \quad (4.14)$$

Gupta & Prince [Gupta et Prince, 1996a; Gupta et Prince, 1996b] proposent une formulation stochastique de modèles d'estimation du mouvement avec les contraintes de régularité **DR1O** et **DR2O** :

$$\int_{\Omega} \alpha \|\nabla \text{div}(\mathbf{w})\|^2 + \beta \|\nabla \text{rot}(\mathbf{w})\|^2 dx dy, \quad (4.15)$$

pour des applications en imagerie médicale. Les paramètres de pondération α et β des contraintes **DR1O** et **DR2O** sont constants et permettent de donner plus ou moins d'influence à chacun des termes. Si α et β sont égaux, la minimisation de la contrainte **DR1O** est équivalente à la minimisation de la norme \mathcal{L}^2 des gradients de la vitesse (équation (4.7)). Elle favorise des champs de mouvement de divergence et vorticité nulles. Pour la contrainte **DR2O** : si α est grand devant β , les variations du champ de rotationnel sont maximales et le champ de divergence tend à être constant (et inversement). Ainsi, cette contrainte favorise une estimation de champs réguliers en divergence et en vorticité. La contrainte **DR2O** est également utilisée dans un cadre d'interpolation et d'approximation vectorielle, comme expliqué ultérieurement dans le chapitre 5. Les études faites dans les domaines météorologique [Amodei, 1991; Corpetti *et al.*, 2002] et mécanique expérimentale des fluides [Yuan *et al.*, 2007] montrent que cette contrainte donne les meilleurs résultats pour des applications d'analyse et d'estimation du mouvement des fluides géophysiques. Citons   galement Nagel et Enkelmann [Nagel et Enkelmann, 1986; Nagel, 1987], qui proposent une contrainte anisotrope, minimale dans la direction normale aux contours et maximale dans la direction des contours :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\|\nabla I\|^2 + 2\delta} [(u_x I_y - u_y I_x)^2 + (v_x I_y - v_y I_x)^2 + \delta(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2)^2] dx dy, \quad (4.16)$$

où δ est une constante.

Enfin, signalons que la contrainte de régularité peut aussi être étendue à la dimension temporelle. La régularisation est ainsi spatio-temporelle sur l'intervalle de temps $[0, T]$. Weickert et Schn  rr [Weickert et Schn  rr, 2001] proposent la régularisation :

$$E_{3d}(\mathbf{w}) = \int_{\Omega \times [0, T]} \varphi (\|\nabla_{3d} u\|^2 + \|\nabla_{3d} v\|^2) dx dy dt, \quad (4.17)$$

où $\nabla_{3d} = (\partial/\partial_x, \partial/\partial_y, \partial/\partial_t)^T$ est l'opérateur gradient tridimensionnel et φ une fonction croissante différentiable, par exemple $\varphi(s^2) = s^2$. Le calcul du mouvement apparent avec l'**ECL** et la régularisation (4.17) est alors un problème tridimensionnel. Sa résolution est plus lente que pour le problème classique en deux dimensions, mais cette approche est moins sensible au bruit et permet de mieux s'affranchir des effets d'*aliasing* temporel dans l'estimation du mouvement (dans le cas d'un mouvement stationnaire ou supposé comme tel).

4.3.3 Méthodes fréquentielles

On distingue deux types de méthodes : celles basées sur l'énergie [Adelson et Bergen, 1985; Heeger, 1988] et celles basées sur la phase [Fleet et Jepson, 1990].

4.3.3.1 Méthodes basées sur l'énergie

Ces techniques utilisent des bancs de filtres de différentes orientations (des filtres passe-bande, ou de Gabor par exemple) dans le domaine fréquentiel. La contrainte imposée pour pallier au problème d'ouverture est spatio-temporelle : le mouvement à déterminer est supposé constant sur les supports spatial et temporel des filtres. Le résultat est donc lissé en temps et en espace.

4.3.3.2 Méthodes basées sur la phase

Les méthodes utilisant la phase effectuent le calcul des dérivées spatio-temporelles de la phase de la transformée de Fourier et non de la fonction intensité.

4.3. Principales approches d'estimation du mouvement apparent

Certains auteurs [Oppenheim et Lim, 1981] ont montré que la phase contient les informations de localisation des objets dans les images, tandis que le module contient essentiellement les informations de texture. L'estimation du mouvement à partir des images de phase peut donc se faire même en présence de texture et/ou de changements d'illumination.

Les méthodes basées sur la phase sont généralement choisies pour estimer de petits mouvements, comme par exemple en imagerie médicale pour le processus de recalage automatique d'images de l'oeil humain [Cooper, 2003] ou pour le suivi des mouvements du myocarde à partir d'images obtenues par résonance magnétique [Osman *et al.*, 1999].

4.3.4 Estimation paramétrique

Les méthodes paramétriques définissent un modèle de mouvement sur l'ensemble du support considéré, généralement tout le domaine image. Le déplacement d'un pixel $I_0(x, y)$ au temps t est modélisé par $dt\mathbf{w}_\theta(x, y)$, où $\mathbf{w}_\theta(x, y)$ est le vecteur vitesse que l'on cherche à déterminer, fonction de x, y et d'un ensemble de paramètres θ . Le modèle paramétrique utilisé dépend du type de mouvement que l'on cherche à estimer. Plus le nombre de paramètres du modèle est important et plus le modèle permet d'estimer un mouvement complexe. Les principaux modèles d'estimation du mouvement global utilisés en traitement d'image sont :

- Les modèles de translation :

$$\begin{cases} u &= a_1 \\ v &= b_2 \end{cases}$$

- Les modèles de zoom et rotation :

$$\begin{cases} u &= a_1 + a_3x + a_4y \\ v &= a_2 - a_4x + a_3y \end{cases}$$

- Les modèles affines, regroupant les translations, les rotations, les homothéties et leurs combinaisons :

$$\begin{cases} u &= a_1 + a_3x + a_4y \\ v &= a_2 + a_5x + a_6y \end{cases}$$

- Les modèles de perspective plane :

$$\begin{cases} u &= (a_1 + a_3x + a_4y)/(1 + a_7x + a_8y) \\ v &= (a_2 + a_5x + a_6y)/(1 + a_7x + a_8y) \end{cases}$$

- Les modèles paraboliques :

$$\begin{cases} u &= a_1 + a_3x + a_4y + a_7xy + a_9x^2 + a_{10}y^2 \\ v &= a_2 + a_5x + a_6y + a_8xy + a_{11}x^2 + a_{12}y^2 \end{cases}$$

Les a_i sont les paramètres à estimer dans le modèle considéré, u et v sont les deux composantes du vecteur mouvement. On peut remarquer que les trois premiers modèles sont en fait des cas particuliers du modèle parabolique, le plus complexe mais exact localement pour une caméra sténopé. En pratique, c'est le modèle affine qui est le plus utilisé, car les modèles plus complexes sont davantage sensibles au bruit.

Un grand nombre de modèles paramétriques du mouvement existent, pour des applications différentes : l'estimation du mouvement apparent [Black et Jepson, 1996], la création de mosaïque d'images [Irani et Anandan, 1998], l'indexation de vidéos par le contenu [T. Zaharia, 2001], la segmentation au sens du mouvement [Odobez et Bouthemy, 1995; Montoliu et Pla, 2001].

4.3.5 Estimation suivant une base de splines

Plusieurs auteurs ont considéré une approche par spline vectorielle pour estimer le mouvement apparent [Suter, 1994; Szeliski, 1996; Rakshit et Anderson, 1997; Srinivasan et Chellappa, 1999; Arigovindan, 2005]. Suter propose d'utiliser une spline vectorielle, vérifiant la contrainte de régularité **DR2O**. A partir d'un ensemble de n points de contrôle \mathbf{x}_i , $i = 1 \dots n$, sélectionnés dans l'image, le champ de vecteurs mouvement est déterminé par une combinaison linéaire de fonctions de base, qui sont les translatées d'une fonction mère Φ , pondérées par des coefficients réels c_i :

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{L}_i \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + p(\mathbf{x}). \quad (4.18)$$

La fonction mère Φ est dérivée de la fonction spline «plaque-mince» et minimise la contrainte de régularité **DR2O**. L'opérateur linéaire $\mathbf{L}_i = \langle \nabla I_i, \cdot \rangle$ est appliqué aux fonctions de base, et $p(\mathbf{x})$ est un polynôme de degré un, appartenant à l'espace nul de la contrainte de régularité. Les coefficients de la solution sont trouvés en posant les conditions d'interpolation : l'**ECL** est vérifiée aux points de contrôle. On obtient alors un système d'équations, qui admet une solution unique, si les points choisis ne sont pas colinéaires. Le problème majeur de cette méthode est qu'elle ne peut pas prendre en compte un grand nombre de points de contrôle, car la fonction mère n'est pas à décroissance rapide : la complexité algorithmique du modèle devient rapidement trop importante. Pour estimer le mouvement à partir d'un grand nombre de points de contrôle, d'autres auteurs suggèrent une approche similaire, avec des fonctions de base à support compact ou à décroissance rapide. Le champ de vecteurs mouvement est alors déterminé par une combinaison linéaire de fonctions de base ϕ , centrées sur les points d'une grille régulière, de pas h , ou non :

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} \phi\left(\frac{\mathbf{x}}{h} - \mathbf{k}\right), \mathbf{k} \in h\mathbb{Z}^2. \quad (4.19)$$

Rakshit et al. [Rakshit et Anderson, 1997] proposent de nombreux choix pour ϕ , de l'interpolation linéaire à la fonction sinus cardinal. Szeliski et al. [Szeliski et Coughlan, 1997; Szeliski, 1996] et [Arigovindan, 2005] utilisent des B-splines à support compact, dont la taille est le pas de la grille, h . Les paramètres $c_{\mathbf{k}}$ sont trouvés en résolvant un système d'équations linéaires, résolu au sens des moindres carrés par des méthodes itératives. Ainsi, Rakshit et Szeliski résolvent l'**ECL** aux points de la grille :

$$\nabla I_i \cdot \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} \phi\left(\frac{\mathbf{x}_i}{h} - \mathbf{k}\right) = -I_{t_i}, i = 1 \dots n. \quad (4.20)$$

Afin de faciliter la convergence de l'algorithme, Szeliski propose une résolution du système par une méthode de type gradient conjugué dans un schéma hiérarchique. Pour des applications en imagerie médicale, Arigovindan [Arigovindan, 2005] suit une approche similaire, en ajoutant une contrainte de régularité à l'**ECL** dans le système (4.20) : les coefficients de la solution (4.19) sont alors obtenus en résolvant un système d'équations qui correspond au minimum

4.4. Approche multi-échelles

d'une énergie quadratique. Trois formulations sont proposées : 1) système d'équations sur-déterminé vérifiant l'**ECL** ; 2) compromis entre l'**ECL** et les contraintes de régularité **DR1O** et **DR2O** ; 3) compromis entre l'**ECL** et la semi-norme introduite par Duchon [Duchon, 1976], qui correspond à la contrainte **DR2O** avec $\alpha = \beta$. L'équation vérifiée par le minimum de l'énergie est discrétisée. La résolution se fait dans une approche multi-échelles en tirant avantage de la fonction mère utilisée, une ondelette B-spline, qui satisfait à une équation d'échelles. Cuzol [Cuzol *et al.*, 2007] propose un estimateur du mouvement fluide basé sur la décomposition de Helmholtz d'un champ de vecteurs. Ce dernier est représenté par une spline paramétrique de deux termes : une composante solénoïdale \mathbf{w}_{sol} et une composante irrotationnelle \mathbf{w}_{irr} . Chaque composante est exprimée comme une combinaison linéaire d'une fonction mère \mathcal{K} , obtenue par la convolution du gradient de la fonction de Green associée au laplacien, et d'une approximation de la divergence et du rotationnel du champ \mathbf{w} :

$$\mathbf{w}_{sol} \approx \sum_{i=1}^p \gamma_i^{sol} \mathcal{K}^\perp \left(\frac{\mathbf{x}_i^{sol} - \mathbf{x}}{\epsilon_i^{sol}} \right), \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_{irr} \approx \sum_{i=1}^p \gamma_i^{irr} \mathcal{K} \left(\frac{\mathbf{x}_i^{irr} - \mathbf{x}}{\epsilon_i^{irr}} \right). \quad (4.21)$$

Les poids γ_i , les centres \mathbf{x}_i des fonctions de base et les tailles des supports ϵ_i sont trouvés en minimisant une fonctionnelle de coût utilisant une version intégrée de l'**ECM**.

4.4 Approche multi-échelles

Le concept d'approche «multi-échelles» est très large, et l'estimation multi-échelles du mouvement en constitue un cas particulier. De nombreux phénomènes naturels sont composés de plusieurs niveaux de détails. On peut citer les phénomènes de transport fluide, où les petites structures (niveau de détail élevé) des mouvements turbulents sont dues à des tourbillons irréguliers ou à l'évolution de chocs entre fronts. Dans le domaine de l'ingénierie, on peut citer la restitution des signaux et des images numériques, dont l'information est composée de sous-signaux de différentes fréquences.

La modélisation d'un phénomène multi-échelles est généralement une tâche d'une complexité algorithmique élevée, qui demande des outils mathématiques spécifiques. Il est nécessaire que l'information soit représentée à différents niveaux de détails, des «basses» échelles vers les «fines» échelles, et qu'un lien soit établi entre les représentations à différentes échelles. Cette stratégie accélère la convergence des modèles, permet d'être moins dépendant de l'initialisation et réduit la complexité algorithmique.

La plupart des algorithmes d'estimation locale du mouvement sont ainsi déclinées dans une version multi-échelles. Une technique répandue [Weber et Malik, 1995] consiste à combiner les estimation du mouvement à différentes résolutions. Si I_0 et I_1 sont les deux images entre lesquelles on estime le mouvement, on définit des représentations multi-échelles I_0^p et I_1^p sous forme pyramidale. Dans un premier temps, les images à l'échelle la plus basse, p_{max} , sont générées en appliquant un filtre passe-bas à l'image de pleine résolution ($p = 0$). Puis, le mouvement «grossier» est estimé entre les images $I_0^{p_{max}}$ et $I_1^{p_{max}}$. A chaque échelle supérieure on compense I_0^p du mouvement estimé à l'échelle $p + 1$, puis on estime un incrément de mouvement entre l'image compensée \tilde{I}_0^p et I_1^p , et ce, jusqu'à atteindre la résolution maximale $p = 0$.

Bernard [Bernard, 1996; Bernard, 1999] considère ce type d'approche en choisissant une base d'ondelettes analytiques du plan, construite par dilatations et translations d'une ondelette mère ψ :

$$\psi_{jk}^s = 2^j \psi(2^j \mathbf{x} - \mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2. \quad (4.22)$$

L'**ECL** est ensuite projetée sur les S vecteurs obtenus pour une échelle j et une position \mathbf{k} . En faisant l'hypothèse que le mouvement apparent est constant sur le support des ondelettes, on obtient S équations :

$$\left\langle \frac{\partial I}{\partial x}, \phi_{jk}^s \right\rangle u + \left\langle \frac{\partial I}{\partial y}, \phi_{jk}^s \right\rangle v + \frac{\partial}{\partial t} \left\langle I, \phi_{jk}^s \right\rangle = 0, \quad \forall s = 1 \dots S. \quad (4.23)$$

Le système est sur-déterminé et résolu au sens des moindres carrés.

Dans le cadre de l'estimation du mouvement de fluides, peu de méthodes ont été définies. Pour des applications en météorologie, Corpetti et Mémin [Mémin et Pérez, 1998; Corpetti, 2002; Mémin et Pérez, 2002] utilisent une version intégrée de l'**ECM**, dans un schéma hiérarchique. L'approche hiérarchique permet d'être moins dépendant des paramètres d'initialisation et d'éviter les minima locaux : le champ de déplacements à une échelle donnée est calculé en fonction du champ à l'échelle immédiatement plus grossière. A chaque échelle, un modèle de mouvement affine est appliqué. Les paramètres du modèle sont différents et adaptés en fonction des échelles : aux échelles grossières le modèle paramétrique favorise un mouvement de translation, aux échelles les plus fines il favorise un mouvement de rotation. Brossard [M-A. Brossard, 1999] propose une formulation multi-échelles pour l'estimation du mouvement des masses d'air sur des images météorologiques mono et multispectrales. Dans le cas monospectral, l'**ECL** est projetée sur des fonctions de base ψ_k , $k = 1 \dots n$, qui sont des séries de Fourier tronquées. L'opérateur de gradient spatial utilisé dans l'**ECL** est régularisé par une convolution avec un noyau gaussien de variance σ : $L_\sigma = G_\sigma * \nabla I$, la valeur de σ définissant l'échelle.

4.5 Conclusion

Nous avons présenté, dans ce chapitre, le problème de l'estimation du mouvement apparent en vision par ordinateur. Ce problème est mal posé et il n'existe pas de solution universelle pour le résoudre. De nombreuses solutions sont proposées et leurs approches dépendent de l'application considérée. Les stratégies multi-résolutions et multi-échelles permettent de faciliter la convergence des algorithmes et/ou de procéder à une estimation «grossière» du mouvement puis à des estimations plus fines, afin d'éviter les minima locaux. Dans le cas de séquences d'images de fluides géophysiques, les méthodes classiques d'estimation du mouvement apparent ne sont pas adaptées. Il est nécessaire de reconsidérer le choix des équations de conservation et contraintes de régularité, et de mettre en place une stratégie multi-échelles permettant la prise en compte de la turbulence.

Chapitre 5

Interpolation et approximation

Ce chapitre présente des notions générales sur l'interpolation et l'approximation de données. Les techniques usuelles sont discutées, puis le problème est expliqué avec des fonctions de base radiales, et plus particulièrement celles vérifiant la contrainte de régularité Div-Rot du second ordre, adaptée à l'étude du mouvement fluide.

5.1 Introduction

L'interpolation peut être vue comme une méthode permettant d'estimer une fonction inconnue, à partir d'un certain nombre d'observations. En d'autres termes, le problème général de l'interpolation peut se formuler de la manière suivante : on considère un ensemble de n points de contrôle $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ répartis uniformément ou non dans un domaine borné $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. A chaque point de contrôle \mathbf{x}_i est associée une valeur f_i , le plus souvent scalaire, mais qui peut aussi être vectorielle. Ces valeurs f_i sont les échantillons d'une fonction inconnue f , c'est-à-dire que l'on a $f(\mathbf{x}_i) = f_i$. L'interpolation consiste à estimer les valeurs de la fonction f aux points $\mathbf{x} \in \Omega$ à partir des valeurs f_i observées aux points de contrôle \mathbf{x}_i . Lorsque les données sont bruitées, il n'est pas toujours judicieux d'interpoler les données car on observe $f_i = f(\mathbf{x}_i) + \epsilon_i$, où ϵ_i représente le bruit contenu dans les données. Dans ce cas, il est préférable de faire une approximation en tolérant un écart aux observations $f_i : f(\mathbf{x}_i)$ peut avoir une valeur légèrement différente de f_i .

5.2 Techniques d'interpolation

Les fonctions d'interpolation (et d'approximation) les plus utilisées sont de deux types :

- Les polynômes ;
- Les splines.

Dans les sections suivantes, nous décrivons le problème de l'interpolation et de l'approximation en une dimension, afin de simplifier les explications. Celles-ci se généralisent aux dimensions supérieures.

5.2.1 Interpolation de Lagrange

Les polynômes de Lagrange permettent d'interpoler des données (x_i, f_i) par un polynôme. On définit les valeurs des polynômes de Lagrange $L_{n,j}$ aux points x_i par :

$$L_{n,j}(x_i) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1 \dots n, \quad (5.1)$$

où n est le degré du polynôme. Le polynôme d'interpolation de Lagrange est alors simplement représenté par :

$$p(x) = \sum_{j=1}^n f_j L_{n,j}(x). \quad (5.2)$$

Les polynômes $L_{n,j}(x)$ sont linéairement indépendants, si les points de contrôle x_i sont tous distincts. Ainsi, ils forment une base de l'espace \mathcal{P}_n des polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 1$. Chacun des polynômes de la base est de degré $n - 1$. Les polynômes $L_{n,j}$ peuvent être construits de la manière suivante :

– Pour $n = 2$,

$$L_{2,1} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}, \quad L_{2,2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1};$$

– Pour $n = 3$,

$$L_{3,1} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_1 - x_3}, \quad L_{3,2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x - x_3}{x_2 - x_3}, \quad L_{3,3} = \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2};$$

– Pour le cas général :

$$L_{n,j} = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad j = 1 \dots n.$$

L'interpolation par des polynômes de Lagrange est de forte complexité, lorsque le nombre de points est élevé. La complexité est évaluée à $\mathcal{O}(n^2)$ opérations, mais elle peut être réduite si les points sont répartis sur une grille régulière.

5.2.2 Interpolation suivant une base de polynômes fixe

Au lieu de construire une base de polynômes définie en fonction des x_i , on peut considérer une base fixe de $\mathcal{P}_n : \{b_j, j = 1 \dots n\}$. Dans ce cas, le polynôme d'interpolation est représenté par :

$$p(x) = \sum_{j=1}^n a_j b_j(x). \quad (5.3)$$

Les coefficients réels $\{a_j\}_{j=1}^n$ sont trouvés en posant les conditions de l'interpolation. On résout un système linéaire de la forme :

$$\begin{pmatrix} b_1(x_1) & b_2(x_1) & \dots & b_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_1(x_n) & b_2(x_n) & \dots & b_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

On remarque que si $b_j(x_i) = \delta_{ij}$, alors les b_j sont les polynômes de Lagrange aux points de contrôle x_i , et la matrice définie en (5.4) est la matrice identité. Si la base de polynômes est

5.2. Techniques d'interpolation

$\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$, la matrice est la matrice de Vandermonde, inversible si les x_i sont distincts. Le calcul des coefficients $\{a_j\}_{j=1}^n$ du polynôme nécessite $O(n)$ opérations.

Le principal problème de l'interpolation polynomiale, outre sa grande complexité algorithmique, est que la solution est fortement «oscillatoire». En fait, l'erreur d'interpolation augmente avec le nombre de points de contrôle, c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - p_n(x)| \right) = \infty, \quad (5.5)$$

où p_n est le polynôme d'interpolation de degré inférieur ou égal à n , tel que $p(x_i) = f(x_i)$. Ce phénomène est appelé «phénomène de Runge» et montre que l'interpolation polynomiale n'est pas adaptée, lorsque le nombre de points de contrôle est élevé. Une meilleure stratégie consiste à utiliser des splines, qui sont des fonctions polynomiales par morceaux. Dans ce cas, pour améliorer l'approximation, il suffit d'augmenter le nombre de morceaux et non le degré des polynômes.

5.2.3 Interpolation par des fonctions splines

Considérons l'ensemble de définition $\Omega = [a, b]$. En faisant une interpolation par des splines, on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ avec $n + 1$ points de contrôle $x_i, i = 0 \dots n$. Une spline $s(x)$ de degré k est une courbe polynomiale par morceaux C^{k-1} , c'est-à-dire qu'elle est :

– définie par morceaux :

$$s(x) = p_{i-1}(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 0 \dots n-1; \quad (5.6)$$

– «lisse» aux points de contrôle intérieurs :

$$p_{i-1}^{(j)}(x_i) = p_i^{(j)}(x_i), \quad j = 0 \dots k-1. \quad (5.7)$$

Comme $s^{(k)}$ est constante par morceaux sur $[a, b]$ mais pas nécessairement continue, $s(x)$ n'est pas nécessairement un polynôme sur $[a, b]$. Une spline «interpolante» vérifie les conditions d'interpolation :

$$s(x_i) = f(x_i) = f_i, \quad i = 0 \dots n. \quad (5.8)$$

La spline interpolante peut éventuellement vérifier des conditions supplémentaires aux bords.

5.2.4 Approximation quadratique

L'approximation quadratique, aussi appelée approximation au sens des moindres carrés, a été étudiée au XIX^e siècle par Tchebychev et Hermite. Le polynôme de meilleure approximation s'exprime à l'aide de polynômes orthogonaux. Ceux-ci sont des polynômes p_n de degré n vérifiant :

$$\langle p_n, p_m \rangle = \int_{\Omega} p_n(x) p_m(x) \omega(x) dx = 0, \quad n \neq m \text{ et } n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

L'ensemble Ω est un intervalle borné ou non de \mathbb{R} , et la fonction $\omega : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction de pondération, continue positive, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\Omega} |x|^n \omega(x) dx < \infty. \quad (5.10)$$

On considère l'espace vectoriel E des fonctions continues de Ω dans \mathbb{R} telles que :

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 \omega(x) dx < \infty. \quad (5.11)$$

Soit f une fonction de $L^2[a, b]$, on dit que le polynôme p_n de degré n est une meilleure approximation quadratique de f si la norme :

$$\|f - p_n\|^2 = \int_a^b (f(x) - p_n(x))^2 d\mu(x), \quad (5.12)$$

est minimale. Soit $f \in L^2[a, b]$ et p_n une suite de polynômes orthogonaux, pour un entier n donné, la quantité :

$$\|f - \sum a_i p_i\|, \quad (5.13)$$

est minimale si, et seulement si, $a_i = \frac{\langle f, p_i \rangle}{\|p_i\|^2}$.

La «régression linéaire» est un cas particulier de cette technique en considérant des polynômes de degré 1. L'approximation quadratique (ou une approximation d'ordre supérieur) est utilisée pour améliorer les résultats de l'approximation linéaire, mais cette méthode est plus complexe et moins robuste.

5.3 Interpolation et approximation par des FBR

Les **fonctions de base radiales (FBR)** sont des fonctions réelles $\phi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ qui, de manière générale, sont définies positives. Les fonctions radiales sont invariantes par rotation, leurs valeurs ne dépendent que de la distance par rapport à l'origine, c'est-à-dire qu'elle peuvent s'écrire sous la forme :

$$\phi(\|\mathbf{x}\|), \quad (5.14)$$

avec $\|\cdot\|$ qui est la norme euclidienne. La distance peut être mesurée par rapport à un autre point que l'origine :

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|). \quad (5.15)$$

Une **FBR** continue $\phi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est définie positive sur \mathbb{R}^d , si, et seulement si, pour n'importe quel ensemble fini $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^d$ de points distincts, la matrice :

$$Q|_X = \phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (5.16)$$

est définie positive, c'est-à-dire que pour n'importe quel vecteur non nul $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\mathbf{c}^T Q|_X \mathbf{c} > 0. \quad (5.17)$$

Les principaux avantages des **FBR** sont :

5.3. Interpolation et approximation par des FBR

- **Elles peuvent être utilisées en dimension quelconque.** Les sections suivantes présentent le problème de l'interpolation en dimension d ;
- **Elles peuvent interpoler ou approximer des données qui sont réparties non uniformément.** On considère par la suite que les points de contrôle sont de répartition quelconque ;
- **Le choix d'une FBR permet le contrôle de la régularité de la spline.** Nous verrons inversement comment, étant donnée la contrainte **DR2O**, on peut déterminer la **FBR** ;
- **Les interpolants/approximants ont une structure simple.** La solution s'exprime comme une combinaison linéaire de **FBR**, qui sont des translatées et des dilatées de la fonction mère, et, le plus souvent, un terme polynomial.

5.3.1 Problème général

Considérons un ensemble de valeurs $f|_X = (f(\mathbf{x}_1), \dots, f(\mathbf{x}_n))^T$ d'une fonction inconnue $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, en des points quelconques $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$, pas nécessairement régulièrement espacés. Le problème d'interpolation consiste à rechercher un interpolant $s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie $s|_X = f|_X$. En d'autres termes :

$$s(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i), i = 1 \dots n. \quad (5.18)$$

L'interpolant de f par des **FBR** $\phi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ a la forme générale :

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) + p(\mathbf{x}), \quad (5.19)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne et p un polynôme de degré $m-1$, m étant défini comme l'«ordre» de la fonction ϕ . Par la suite, nous verrons que l'ordre de ϕ est lié à l'ordre de dérivation de la fonctionnelle qui minimise l'interpolant. Un cas particulier, correspondant aux fonctions ϕ à support compact, est celui où le terme polynomial est omis. Dans ce cas, l'ordre de ϕ est $m = 0$.

5.3.2 Calcul des coefficients de la solution

Dans le cas où $m = 0$, les coefficients de la solution $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$ sont trouvés en posant les conditions d'interpolation, ce qui revient à résoudre un système d'équations linéaires :

$$Q|_X \mathbf{c} = f|_X, \quad (5.20)$$

où :

$$Q|_X = \phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (5.21)$$

Si la fonction ϕ est définie positive, alors le système (5.20) admet une solution unique.

Dans le cas où $m > 0$, le polynome p rajoute q degrés de libertés dans l'expression de la solution, où q est la dimension de l'espace des polynômes \mathcal{P}_m^d :

$$q = \binom{m-1+d}{d}. \quad (5.22)$$

Les degrés de liberté additionnels sont généralement contraints en imposant que :

$$\sum_{j=1}^n c_j p(\mathbf{x}_j) = 0 \quad \text{pour tout } p \in \mathcal{P}_m^d. \quad (5.23)$$

Pour trouver les coefficients de la solution (5.19), on résout un système d'équations en posant les conditions de l'interpolation, sous la contrainte de l'équation (5.23). Cela revient à résoudre un système du type des multiplicateurs de Lagrange. Pour un point $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d$ et le multi-index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^d$, on note $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$. Le système à résoudre s'écrit :

$$\begin{pmatrix} Q|_X & S \\ S^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f|_X \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.24)$$

où :

$$S = \left((\mathbf{x}_j)^\alpha \right)_{1 \leq j \leq n; |\alpha| < m} \in \mathbf{R}^{n \times q}, \quad (5.25)$$

et $\mathbf{d} = (d_\alpha)_{|\alpha| < m} \in \mathbb{R}^q$ sont les multiplicateurs de Lagrange.

5.3.3 Existence et unicité de la solution

L'existence et l'unicité de la solution de (5.24) peuvent être étudiées en considérant le système homogène associé :

$$Q|_X \mathbf{c} + S \mathbf{d} = 0 \quad (5.26)$$

$$S^T \mathbf{c} = 0 \quad (5.27)$$

En multipliant (5.26) par \mathbf{c}^T et en utilisant la condition (5.27), on obtient :

$$\mathbf{c}^T Q|_X \mathbf{c} = 0. \quad (5.28)$$

Pour garantir l'existence d'une solution à (5.26) et (5.27), on impose que, pour n'importe quel ensemble de points de contrôle $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$, la matrice $Q|_X$ soit définie positive sur le sous-espace linéaire de \mathbb{R}^d contenant les vecteurs $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ vérifiant (5.27). En d'autres termes :

$$\mathbf{c}^T Q|_X \mathbf{c} > 0, \quad \text{pour tous } X \text{ et } \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ sous la contrainte que } S^T \mathbf{c} = 0. \quad (5.29)$$

Du fait de la définition de S dans (5.25), la condition (5.29) dépend de l'ordre m de l'espace des polynômes \mathcal{P}_m^d . Pour $m = 0$, la condition $S^T \mathbf{c} = 0$ dans (5.29) n'existe pas, et dans ce cas ϕ est définie positive. Pour $m > 0$, on dit que la **FBR** continue $\phi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est conditionnellement définie positive d'ordre m sur \mathbb{R}^d , si la condition (5.29) est vérifiée pour n'importe quel ensemble de points de contrôle $X \subset \mathbb{R}^d$. Pour ϕ définie conditionnellement positive, la relation (5.28) implique que $\mathbf{c} = 0$, et l'équation (5.26) devient :

$$S \mathbf{d} = 0. \quad (5.30)$$

L'unicité de la solution du système homogène (équations (5.26) et (5.27)) repose sur l'injectivité de la matrice S . Celle-ci est injective si, et seulement si, l'ensemble X est \mathcal{P}_m^d -unisolvant, c'est-à-dire si :

$$p(\mathbf{x}_i) = 0, i = 1 \dots n \Rightarrow p \equiv 0, p \in \mathcal{P}_m^d. \quad (5.31)$$

Pour $m = 0$ la condition reste vide, pour $m = 1$ elle est triviale, les points doivent être distincts, et en dimension deux cela revient à dire que les points de contrôle de l'ensemble X ne doivent pas être colinéaires.

5.3. Interpolation et approximation par des FBR

5.3.4 Principales FBR

Les **FBR** les plus utilisées sont décrites dans le tableau 5.1. Elles sont construites à partir de deux techniques : par des fonctions complètement monotones [Micchelli, 1986] ou par transformée de Fourier généralisée.

| FBR | $\phi(\ x\)$ | Paramètres | Ordre |
|-------------------------|---|---|----------------------------------|
| Splines polyharmoniques | $\ x\ ^\nu$ $\ x\ ^{2k} \log(\ x\)$ | $\nu > 0, \nu \notin 2\mathbb{N}$ $k \in \mathbb{N}$ | $\lceil \nu/2 \rceil$ $k + 1$ |
| Gaussienne | $e^{-\ x\ ^2}$ | - | 0 |
| Multiquadrique | $(1 + \ x\ ^2)^\nu$ | $\nu > 0, \nu \notin \mathbb{N}$ | $\lceil \nu \rceil$ |
| Multiquadrique inversée | $(1 + \ x\ ^2)^\nu$ | $\nu < 0$ | 0 |

TAB. 5.1 – Les principales fonctions de base radiale

5.3.5 FBR à support compact

Dans le cas de **FBR** à support compact, l'ordre est $m = 0$ et la partie polynomiale dans (5.19) est omise. Les **FBR** à support compact dépendent de d . Wendland [Wendland, 1995] propose des **FBR** à support compact de la forme :

$$\phi_{d,k}(\|x\|) = \begin{cases} p_{d,k} & \text{pour } 0 \leq \|x\| \leq 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.32)$$

où $p_{d,k}$ est un polynôme de degré $\lfloor d/2 \rfloor + 3k + 1$. Le support de $\phi_{d,k}$ est compris entre 0 et 1 et la fonction admet des dérivées jusqu'à l'ordre $2k$: $\phi_{d,k} \in C^{2k}(\mathbf{R}^d)$. Buhmann [Buhmann, 2001] propose des **FBR** à support compact analogues aux splines «plaque-mince» de par leur degré de continuité, et définies à partir de l'intégrale :

$$\phi(\|x\|) = \int_{\|x\|^2}^{\infty} (1 - \|x\|^2/\beta)^\lambda \beta^\epsilon g(\beta) d\beta, \quad (5.33)$$

où $\epsilon > -1$. Le paramètre λ dépend de la dimension, et :

$$g(\beta) = (1 - \beta^\mu)_+^\nu, \quad 0 < \mu \leq \frac{1}{2} \text{ et } \nu \geq 1 \quad (5.34)$$

est la fonction «puissance tronquée», avec $(x)_+ = x$, pour $x > 0$, et $(x)_+ = 0$, pour $x \leq 0$. Les **FBR** définies par (5.33) ont un degré de continuité $\phi_{d,k} \in C^{1+\lceil 2\epsilon \rceil}$, où $\lceil x \rceil$ est l'entier immédiatement supérieur à x . Notons que Gaspari et Cohn [Gaspari et Cohn, 1996] démontrent qu'il est possible de construire une **FBR** à support compact par le produit d'une fonction à support compact et d'une **FBR** à support non compact.

5.3.6 Splines polyharmoniques

Les splines polyharmoniques ou «plaque-mince», présentées dans le tableau 5.1 et introduites par Duchon [Duchon, 1975; Duchon, 1976], minimisent la semi-norme de l'espace de Beppo-Levi d'ordre $V^m(\mathbf{R}^2)$:

$$|f|_{V^m(\mathbf{R}^2)}^2 = \int_{\mathbf{R}^d} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_d!} (D^\alpha f)^2 d\mathbf{x}. \quad (5.35)$$

Elles tiennent leur nom du fait qu'elles sont solutions de l'équation fondamentale du laplacien itéré (voir annexes et [Sabbah, 2000]). Dans le cas particulier $m = d = 2$, la spline minimise :

$$|f|_{V^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial xy} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 dx dy \quad \text{pour } f \in V^2(\mathbb{R}^2). \quad (5.36)$$

L'interpolant a la forme :

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c_i \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2 \log(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) + d_1 + d_2 x + d_3 y. \quad (5.37)$$

5.3.6.1 Interpolation vérifiant la contrainte DR2O

Dans le contexte de la météorologie, Amodei [Amodei, 1993; Amodei, 1991; Amodei et Benbourhim, 1991] propose une méthode, basée sur la théorie générale des splines, pour approximer un champ de vecteurs vérifiant la contrainte régularité **DR2O**. En faisant le constat qu'un champ de vecteurs peut être décomposé en une composante solénoïdale et une composante irrotationnelle (décomposition de Helmholtz), Amodei propose un modèle qui permet d'approximer un champ de vecteurs spline, solution du problème :

$$\begin{cases} \min \int_{\mathbb{R}^2} \alpha \|\nabla \operatorname{div}(\mathbf{w})\|^2 + \beta \|\nabla \operatorname{rot}(\mathbf{w})\|^2 dx dy \\ \text{sous la contrainte que } \mathbf{w}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{w}_i, i = 1 \dots n, \quad \mathbf{w} \in V^2 \times V^2 \end{cases} \quad (5.38)$$

D'après les théorèmes généraux d'existence et d'unicité des fonctions splines [Atteia, 1992], on montre que la solution du problème (5.38) admet une solution unique si, et seulement si, il existe des coefficients réels a_i, b_i , satisfaisant l'égalité :

$$\alpha \int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla \operatorname{div} \mathbf{w}, \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle dx dy + \beta \int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla \operatorname{rot} \mathbf{w}, \nabla \operatorname{rot} \mathbf{v} \rangle dx dy = \sum_{i=1}^n a_i u(\mathbf{x}_i) + \sum_{i=1}^n b_i v(\mathbf{x}_i), \quad (5.39)$$

pour tout $\mathbf{v} = (u, v)^T \in V^m(\mathbb{R}^2)$. L'équation (5.39) peut se réécrire sous la forme du système différentiel :

$$\begin{cases} \Delta (\alpha \partial_x \operatorname{div} \mathbf{w} - \beta \partial_y \operatorname{rot} \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{\mathbf{x}_i} \\ \Delta (\alpha \partial_y \operatorname{div} \mathbf{w} + \beta \partial_x \operatorname{rot} \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n b_i \delta_{\mathbf{x}_i} \end{cases} \quad (5.40)$$

avec les coefficients $\{a_i\}_{i=1}^n$ et $\{b_i\}_{i=1}^n$ vérifiant les conditions d'orthogonalité :

$$\sum_{i=1}^n a_i p(\mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^n b_i p(\mathbf{x}_i) = 0, \quad \forall p \in \mathcal{P}_1. \quad (5.41)$$

La solution générale de (5.40) est la somme de la solution générale du système homogène associé et d'une solution particulière. Cette dernière est trouvée par la technique dite de la

5.3. Interpolation et approximation par des FBR

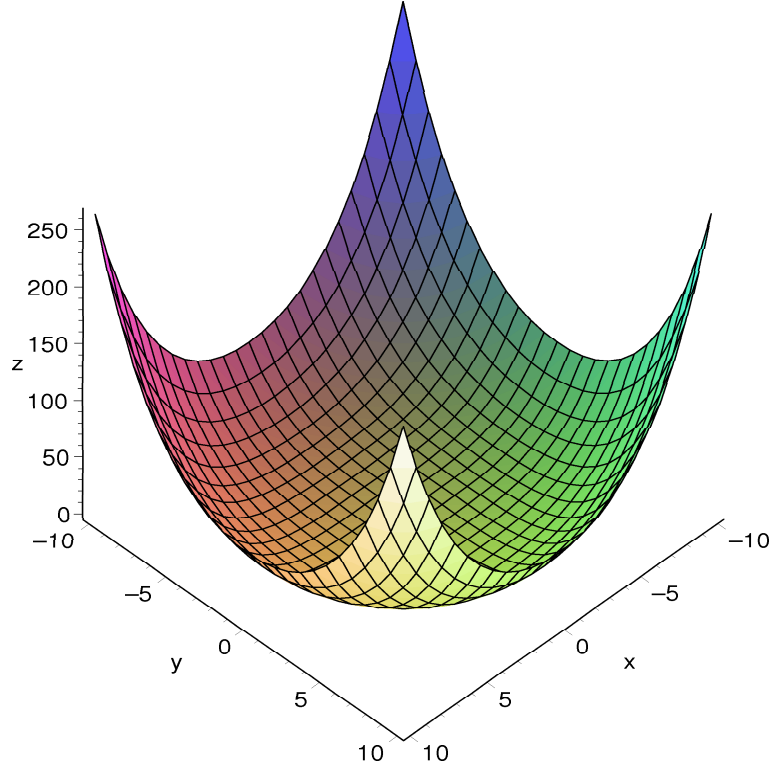


FIG. 5.1 – La fonction mère de la spline «plaque-mince» $\phi = (128\pi)^{-1} \|x\|^4 \log \|x\|$ sur le domaine $[-10, 10] \times [-10, 10]$.

«solution fondamentale», et s'exprime sous la forme d'une somme de fonctions de base qui sont des dérivées de la fonction spline «plaque-mince» $\phi_2(\mathbf{x})$, illustrée sur la figure 5.1 :

$$\phi_2 = (128\pi)^{-1} \|x\|^4 \log \|x\|. \quad (5.42)$$

Pour simplifier la rédaction, nous omettons les indices de ϕ portant sur la dimension et l'ordre des **FBR**. La solution du problème (5.38) s'écrit :

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{1}{\alpha} \phi_{xx}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) + \frac{1}{\beta} \phi_{yy}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \right) + \sum_{i=1}^n b_i \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \phi_{xy}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) + p(\mathbf{x}) \\ v = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \phi_{xy}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) + \sum_{i=1}^n b_i \left(\frac{1}{\alpha} \phi_{yy}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) + \frac{1}{\beta} \phi_{xx}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \right) + q(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (5.43)$$

où nous employons la notation $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$ pour $\phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|)$, et les indices x et y de ϕ dénotent la direction. Les polynômes $p(\mathbf{x})$ et $q(\mathbf{x})$ sont des polynômes de degré au plus un :

$$p(\mathbf{x}) = c_1 + c_2x + c_3y \quad \text{et} \quad q(\mathbf{x}) = d_1 + d_2x + d_3y, \quad (5.44)$$

avec $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$ et $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)^T$ des coefficients réels. Les coefficients $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^T$ et $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$ de la solution (5.43) sont trouvés en posant les conditions d'interpolation, soit :

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{w}_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.45)$$

Au final, on résout un système d'équations linéaires de la même forme qu'en (5.24), soit :

$$\begin{pmatrix} Q|_X + \lambda Id & S \\ S^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.46)$$

avec :

$$Q|_X = \left(\frac{1}{\alpha} \phi_{DIV} + \frac{1}{\beta} \phi_{ROT} \right). \quad (5.47)$$

Les matrices :

$$\phi_{DIV} = \begin{pmatrix} \phi_{xx}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) & \phi_{xy}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \\ \phi_{xy}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) & \phi_{yy}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

et :

$$\phi_{ROT} = \begin{pmatrix} \phi_{yy}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) & -\phi_{xy}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \\ -\phi_{xy}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) & \phi_{xx}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

sont de taille $2n \times 2n$, et

$$S = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

est une matrice de taille $2n \times 6$. Notons que le problème a été étudié par Amodei [Amodei, 1993] dans le cas où $m \geq 2$:

$$\begin{cases} \min \int_{\mathbf{R}^2} \alpha \|\nabla^m \text{div}(\mathbf{w})\|^2 + \beta \|\nabla^m \text{rot}(\mathbf{w})\|^2 dx dy \\ \text{sous la contrainte que } \mathbf{w}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{w}_i, i = 1 \dots n, \quad \mathbf{w} \in V^m \times V^m, \end{cases} \quad (5.51)$$

et quand le degré n'est pas le même sur les opérateurs de divergence et de rotationnel. Plus récemment, Arigovindan [Arigovindan, 2005] s'est intéressé au même problème pour des applications en imagerie médicale.

5.3.7 Quasi-interpolation

Le terme de *quasi-interpolant* a été introduit par De Boor et Fix [de Boor et Fix, 1973]. Dans cette approche, on construit une spline $\mathcal{F}_\pi f$ de degré k , qui approxime une fonction $f \in C^k(\Omega)$. $\mathcal{F}_\pi f$ est appelée quasi-interpolant. Par la suite, Lyche et Schumaker [Lyche et Schumaker, 1975] ont proposé la construction d'un opérateur de quasi-interpolation \mathcal{Q} , permettant d'approximer une fonction f de une ou plusieurs variables et à valeurs réelles. Le quasi-interpolant utilise directement les valeurs de f aux points de contrôle et est de la forme :

$$\mathcal{Q}f = \sum_i \lambda_i(f) N_i, \quad (5.52)$$

5.3. Interpolation et approximation par des FBR

où les $\{N_i\}$ constituent une base de B-splines, et les $\{\lambda_i\}$ forment un ensemble de fonctions linéaires. L'opérateur de quasi-interpolation Q est construit de manière à ce qu'il puisse être appliqué à une large classe de fonctions : continues ou intégrables. Ainsi, Q est local, c'est-à-dire que $Qf(x)$ ne dépend que des valeurs de f dans un petit voisinage de x . Le quasi-interpolant Qf approxime f , avec un ordre d'approximation correspondant à la meilleure approximation dans l'espace des splines. Dans un cadre plus général, Powell [Powell, 1992] définit un quasi-interpolant s permettant d'approximer une fonction f , dont on ne connaît que des valeurs sur une grille régulière, c'est-à-dire $\{f(i), i \in \mathbb{Z}^d\}$. En dimension deux, un tel quasi-interpolant s'écrit :

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} f(i) \Psi(\mathbf{x} - i). \quad (5.53)$$

La fonction mère Ψ est construite avec des fonctions à symétrie sphérique ϕ centrées sur les points de la grille :

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_{k \in \mathcal{N}} \mu_k \phi(\|\mathbf{x} - k\|), \quad (5.54)$$

où \mathcal{N} est un sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 , $|\mathcal{N}|$ est fini, et les coefficients $\{\mu_k, k \in \mathcal{N}\}$ sont réels. Les coefficients μ_k sont choisis de manière à ce que Ψ soit absolument intégrable et vérifie une condition de normalisation :

$$\int_{\mathbf{x}} \Psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1. \quad (5.55)$$

La définition d'un quasi-interpolant vectoriel, vérifiant une contrainte de régularité **DR2O**, a été étudiée par Amodéi [Amodéi et Benbourhim, 1994] dans le cas d'un domaine infini et par Chen [Chen et Suter, 1999] dans le cas d'un domaine fermé et borné.

Le système (5.40) peut se réécrire sous la forme :

$$G(D)\Phi = \delta I_2, \quad (5.56)$$

où I_2 est la matrice identité de taille 2×2 , et δ la fonction de Dirac. $G(D)$ dépend d'opérateurs différentiels et s'écrit :

$$G(D) = \Delta \begin{pmatrix} \alpha \partial_{xx} + \beta \partial_{yy} & (\alpha - \beta) \partial_{xy} \\ (\alpha - \beta) \partial_{xy} & \alpha \partial_{yy} + \beta \partial_{xx} \end{pmatrix}. \quad (5.57)$$

Δ est l'opérateur laplacien scalaire. La solution Φ du système (5.56) s'exprime comme une somme de dérivées secondes de la fonction mère de la spline «plaque-mince», notée $\phi(\mathbf{x})$, pondérées par des coefficients constants α et β . Autrement dit :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \partial_{xx}^2 \phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{\beta} \partial_{yy}^2 \phi(\mathbf{x}) & (\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}) \partial_{xy}^2 \phi(\mathbf{x}) \\ (\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}) \partial_{xy}^2 \phi(\mathbf{x}) & \frac{1}{\alpha} \partial_{yy}^2 \phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{\beta} \partial_{xx}^2 \phi(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (5.58)$$

La fonction mère du quasi-interpolant vectoriel Ψ_h est construite à partir d'une discrétisation du système (5.56). La partie gauche s'écrit :

$$G(D_h)\Phi, \quad (5.59)$$

où $G(D_h)$ est une discrétisation de l'opérateur $G(D)$ défini en (5.57). Cependant, il n'est pas possible de prendre directement $\Psi = G(D_h)\Phi$ comme fonction mère du quasi-interpolant. En effet, la matrice (5.59) n'est ni symétrique ni définie positive. Il faut préalablement factoriser $G(D)$:

$$G(D) = Q(D)Q(D), \quad (5.60)$$

où $Q(D)$ est défini par :

$$Q(D) = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha}\partial_{xx} + \sqrt{\beta}\partial_{yy} & (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})\partial_{xy} \\ (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})\partial_{xy} & \sqrt{\alpha}\partial_{yy} + \sqrt{\beta}\partial_{xx} \end{pmatrix}. \quad (5.61)$$

L'opérateur $Q(D)$ est ensuite discrétisé en $Q(D_h)$. Les opérateurs continus de dérivées partielles sont remplacés par des opérateurs de différences finies de pas h :

$$\partial_{h,j} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \delta & h \\ -\frac{\delta}{2}e_j & +\frac{\delta}{2}e_j \end{pmatrix}, \quad (5.62)$$

où $e_1 = (1, 0)^T$ et $e_2 = (0, 1)^T$. L'opérateur itéré D_h^m est défini par :

$$D_h^m = \underbrace{(\partial_{h,1} \circ \dots \circ \partial_{h,1})}_{m_1 \text{ fois}} \circ \underbrace{(\partial_{h,2} \circ \dots \circ \partial_{h,2})}_{m_2 \text{ fois}}, \quad (5.63)$$

pour $m = (m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2$. La fonction mère est définie par :

$$\Psi_h(\mathbf{x}) = h^2 Q(D_h)\Phi Q(D_h). \quad (5.64)$$

Le quasi-interpolant s'exprime comme la somme de dilatées et translatées de Ψ , pondérées par des coefficients, qui sont les échantillons connus du champ de vecteurs \mathbf{w} sur une grille régulière de pas h :

$$Q_h \mathbf{w}(\mathbf{x}) = \sum_{vh \in \Omega} \mathbf{w}(vh) \Psi_h(\mathbf{x} - hv), \quad (5.65)$$

ou de manière équivalente [Amodei et Benbourhim, 1994] :

$$Q_h \mathbf{w}(\mathbf{x}) = \sum_{vh \in \Omega} \mathbf{w}(vh) \Psi_1\left(\frac{\mathbf{x}}{h} - v\right). \quad (5.66)$$

Le quasi-interpolant, défini à partir de la fonction mère Ψ_h , permet d'obtenir une approximation de la spline «plaque-mince» par une discrétisation particulière. La fonction Ψ_h est à décroissance rapide et par conséquent plus adaptée que les fonctions à support infini pour la formulation de modèles numériques multi-échelles.

5.3.8 Interpolation de données projetées

Dans le contexte de la météorologie, Wahba et Wendelberger [Wahba et Wendelberger, 1980] considèrent le problème de minimisation suivant :

$$\min \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{L}_i \mathbf{w} - z_i)^2 \sigma_i^2 + \lambda J_m(\mathbf{w}) \right\}, \quad (5.67)$$

5.3. Interpolation et approximation par des FBR

où J_m est la semi-norme définie par Duchon (voir section 5.3.6), et les observations sont écrites comme :

$$z_i = \mathbf{L}_i \mathbf{w} + \epsilon_i. \quad (5.68)$$

Les \mathbf{L}_i sont des fonctions, linéaires et continues, de \mathbf{w} , et les ϵ_i les erreurs, d'espérance nulle et de variance σ_i^2 possiblement inconnues. La résolution du problème s'inscrit dans la théorie des espaces de Hilbert et fait intervenir des noyaux reproduisants [Aronszajn, 1950]. Soit X un ensemble et E l'espace des fonctions $X \mapsto \mathbb{C}$. Soit H un sous-espace vectoriel de E et \langle, \rangle un produit scalaire sur H tel que (H, \langle, \rangle) soit un espace de Hilbert. Un noyau reproduisant est une fonction $R : X \times X \mapsto \mathbb{C}$ telle que pour tout $y \in X$, en notant $R_y : X \mapsto \mathbb{C}$ la fonction $x \mapsto R(x, y)$, on a $R_y \in H$ et, pour tout $f \in H$, $f(y) = \langle f, R_y \rangle$.

Si on considère un ensemble indexé arbitraire \mathcal{T} , $\mathbf{w} \in \mathcal{H}_R$ un espace de Hilbert à noyau reproduisant de fonctions sur \mathcal{T} , et $\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_n$ un ensemble de fonctionnelles linéaires sur \mathcal{H}_R , on a la décomposition suivante :

$$\mathcal{H}_R = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \quad (5.69)$$

où $\dim \mathcal{H}_0 = M \leq n$. Une estimée de la fonction \mathbf{w} est trouvée en recherchant $\mathbf{w} \in \mathcal{H}_R$ qui minimise :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{L}_i \mathbf{w} - z_i)^2 + \lambda \|P_1 \mathbf{w}\|_R^2, \quad (5.70)$$

où P_1 est la projection orthogonale de \mathbf{w} sur \mathcal{H}_1 . Une propriété avantageuse des noyaux reproduisant est de pouvoir obtenir le «représentant» de n'importe quelle fonctionnelle linéaire bornée. C'est-à-dire, si η_i est le «représentant» de \mathbf{L}_i , on a :

$$\langle \eta_i, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{L}_i \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \in \mathcal{H}_R. \quad (5.71)$$

De la même manière, on a :

$$\eta_i(s) = \langle \eta_i, R_s \rangle = \mathbf{L}_i R_s = \mathbf{L}_{i(\cdot)} R(s, \cdot), \quad (5.72)$$

où $\mathbf{L}_{i(\cdot)}$ signifie que \mathbf{L}_i est appliqué à $R(s, \cdot)$. Ainsi, pour obtenir $\eta_i(s)$ on applique la fonctionnelle \mathbf{L}_i à $R(s, t)$, considéré comme une fonction de t . Par exemple, si :

$$\mathbf{L}_i \mathbf{w} = \mathbf{w}'(t_i), \quad (5.73)$$

alors :

$$\eta_i(s) = \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) R(s, u) \Big|_{u=t_i}. \quad (5.74)$$

On peut réécrire l'équation (5.70) sous la forme :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\langle \eta_i, \mathbf{w} \rangle - z_i)^2 + \lambda \|P_1 \mathbf{w}\|_R^2. \quad (5.75)$$

Kimeldorf et Wahba [Kimeldorf et Wahba, 1971] ont montré que le minimum de (5.75) est donné par :

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n c_i \xi_i + \sum_{j=1}^M d_j \phi_j, \quad (5.76)$$

si la matrice S , de taille $n \times M$, de terme général :

$$S_{ij} = \mathbf{L}_i \phi_j, \quad i = 1 \dots n, \quad j = 1 \dots M \quad (5.77)$$

est de rang plein. Les fonctions ϕ_1, \dots, ϕ_M engendrent l'espace nul \mathcal{H}_0 de P_1 et :

$$\xi_i = P_1 \eta_i. \quad (5.78)$$

Les coefficients, réels, $\mathbf{c} = \{c_1, \dots, c_n\}^T$ et $\mathbf{d} = \{d_1, \dots, d_M\}^T$ sont trouvés en résolvant le système linéaire :

$$\begin{cases} (Q + n\lambda Id) \mathbf{c} + S \mathbf{d} = \mathbf{z} \\ S^T \mathbf{d} = 0 \end{cases} \quad (5.79)$$

avec la matrice Q de terme général :

$$Q_{ij} = \langle \xi_i, \xi_j \rangle. \quad (5.80)$$

La preuve est démontrée dans [Wahba, 1990]. Soit $\mathcal{H}_R = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_0 \perp \mathcal{H}_1$, R^0 et R^1 les noyaux reproduisant de \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 , on a

$$R(s, t) = R^0(s, t) + R^1(s, t), \quad (5.81)$$

De plus :

$$\begin{aligned} \xi_i(\mathbf{x}) = \langle \xi_i, R_{\mathbf{x}} \rangle &= \langle P_1 \eta_i, R_{\mathbf{x}} \rangle = \langle \eta_i, P_1 R_{\mathbf{x}} \rangle \\ &= \langle \eta_i, R_{\mathbf{x}}^1 \rangle \\ &= \mathbf{L}_1 R_{\mathbf{x}}^1, \end{aligned} \quad (5.82)$$

où $R_{\mathbf{x}}^1$ est le «représentant» évalué au point \mathbf{x} dans \mathcal{H}_1 . D'autre part :

$$\langle \xi_i, \xi_j \rangle = \langle \eta_i, \xi_j \rangle \quad (5.83)$$

car $\langle \eta_i - \xi_i, \xi_j \rangle = 0$, et :

$$\langle \xi_i, \xi_j \rangle = \mathbf{L}_i \eta_j = \mathbf{L}_{i(s)} \mathbf{L}_{j(t)} R^1(s, t). \quad (5.84)$$

Cette approche a été reprise par Suter [Suter, 1994] pour la formulation d'un modèle d'estimation du mouvement, dans un cadre de splines vectorielles vérifiant la contrainte **DR2O**. Étant donné un ensemble de points de contrôle non colinéaires $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$ du plan image, le modèle de Suter cherche un champ de vecteurs spline solution du problème :

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n (\mathbf{L}_i \mathbf{w} + It_i)^2 + \lambda \int_{\Omega} \alpha \|\nabla \operatorname{div}(\mathbf{w})\|^2 + \beta \|\nabla \operatorname{rot}(\mathbf{w})\|^2 dx dy \right\}, \quad (5.85)$$

où Ω est le domaine image et $\mathbf{L}_i \mathbf{w} = \mathbf{L}(\mathbf{w}(\mathbf{x}_i))$ signifie que l'opérateur \mathbf{L} est appliqué à \mathbf{w} au point \mathbf{x}_i . De la même manière, la notation It_i signifie que le gradient temporel est évalué au point \mathbf{x}_i , soit $\partial I(\mathbf{x}_i)/\partial t$. Nous adopterons ces notations dans la suite du chapitre. L'opérateur \mathbf{L} , linéaire, est un opérateur de projection défini par :

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{L}(\cdot) = \langle \nabla I(\mathbf{x}), \cdot \rangle, \quad (5.86)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel. Dans le problème (5.85), λ est un paramètre de pondération constant, qui effectue un compromis entre le terme d'attache aux données et la contrainte de régularité **DR2O**. Lorsque $\lambda \rightarrow 0$, le problème devient un problème d'interpolation :

$$\begin{cases} \min \int_{\Omega} \alpha \|\nabla \operatorname{div}(\mathbf{w})\|^2 + \beta \|\nabla \operatorname{rot}(\mathbf{w})\|^2 dx dy \\ \text{et} \\ \mathbf{L}_i \mathbf{w} = -It_i, \quad i = 1 \dots n \end{cases} \quad (5.87)$$

5.4. Réduction de la complexité

A l'inverse, lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, le problème devient un problème d'approximation polynomiale au sens des moindres carrés. λ peut être estimé, empiriquement ou automatiquement, par des méthodes de validation croisée généralisée ou maximum de vraisemblance généralisé [Wahba, 1990]. La solution de (5.85) s'exprime sous la forme d'une somme comprenant deux termes :

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{L}_i \Phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) + \sum_{i=1}^M d_i p(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5.88)$$

Les fonctions Φ sont des dérivées de la fonction mère de la spline «plaque-mince» définie en (5.42). La notation $\mathbf{L}_i \Phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|)$ signifie que l'opérateur \mathbf{L} est appliqué à la fonction Φ comme étant une fonction de \mathbf{x}_i . Les coefficients de la solution sont trouvés en posant les conditions d'interpolation de (5.85) :

$$\mathbf{L}_i \mathbf{w} = -It_i, \quad i = 1 \dots n, \quad (5.89)$$

sous la contrainte que $\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{L}_i p(\mathbf{x}_i) = 0$, avec p un polynôme de degré au plus un, pour garantir une solution unique. Sous forme matricielle, on résout un système linéaire :

$$\begin{pmatrix} Q + \lambda Id & S \\ S^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -It \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.90)$$

où la matrice Q est de terme général :

$$\mathbf{L}_i \mathbf{L}_j \Phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|). \quad (5.91)$$

L'opérateur \mathbf{L} est ainsi appliqué à la fonction Φ , comme étant d'abord une fonction de sa première variable \mathbf{x}_i , puis de sa deuxième variable \mathbf{x}_j . La matrice S est de terme général :

$$S = \mathbf{L}_i p, \quad (5.92)$$

où p est un polynôme de degré 1 correspondant à l'espace nul de la fonctionnelle d'énergie **DR2O**.

5.4 Réduction de la complexité

Le calcul d'une solution spline nécessite deux étapes : le calcul de coefficients réels qui satisfont aux conditions d'approximation, ou d'interpolation, et le calcul de la solution. Chacune de ces deux étapes dépend du nombre n de points de contrôle, ce qui pose problème lorsque n est grand. En effet, le calcul de la solution en un seul point de la spline dépend de tous les points de contrôle. De plus, le calcul des coefficients demande de calculer une matrice dense, ce qui nécessite $\mathcal{O}(n^2)$ opérations, et son inverse, ce qui coûte $\mathcal{O}(\frac{2}{3}n^3)$ opérations. Il existe plusieurs stratégies pour accélérer ces étapes, nous les présentons dans les sections suivantes.

5.4.1 Méthodes multipôles

Les méthodes multipôles proposent une amélioration numérique pour le calcul de la solution du problème d'interpolation/d'approximation. En supposant que l'on néglige le terme polynomial (dans le cas de fonctions Φ conditionnellement définies positives), l'interpolant s'écrit :

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c_i \Phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|). \quad (5.93)$$

Le calcul de cette solution en un point nécessite n opérations, soit un coût total de $O(m \times n)$ opérations si on évalue la solution en m points. Ce coût n'est pas acceptable dès lors que n est grand. Dans ce cas, il est préférable de considérer des méthodes approximant la solution et permettant un calcul en $O(m \log n)$. Pour ce faire, les méthodes multipôles font un découpage hiérarchique de l'espace : on considère un ensemble de points de contrôle situés dans une région R du domaine Ω , centrée sur le point où l'on évalue la solution : \mathbf{x}_0 . La matrice Φ est séparée en deux termes :

$$\Phi = \Phi_{\text{Proche}} + \Phi_{\text{Lointain}}. \quad (5.94)$$

Cela revient à dire que, le calcul de la solution se fait de manière exacte, avec les points situés dans la région R , proches du point où l'on évalue la solution, et de manière approchée avec les points de contrôle hors de R . La fonction mère Φ_{Lointain} est obtenue à partir d'une décomposition en séries de Taylor de la fonction Φ_{Proche} , et est telle que :

$$\lim_{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \rightarrow \infty} \Phi_{\text{Lointain}}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) = 0. \quad (5.95)$$

Pour des applications en imagerie médicale, Chen propose des méthodes multipôles pour le problème d'interpolation de données vectorielles vérifiant la contrainte **DR2O** en deux [Chen et Suter, 1997] et trois [Chen et Suter, 1998] dimensions. Le coût du calcul de la solution est réduit à $O(m + n)$, où m est le nombre de points où l'on évalue la spline. Les méthodes multipôles sont surtout utilisées en physique pour des applications variées : astrophysique, dynamique moléculaire, dynamique des fluides et en électromagnétisme pour la résolution des équations de Helmholtz et de Maxwell harmoniques, mises sous forme intégrale et discrétisées par éléments finis.

5.4.2 Partition de l'unité

L'idée de partition de l'unité avec des **FBR** a été introduite par Franke [Franke, 1977; Franke, 1982] et récemment reprise dans [Wendland, 2002]. Le principe consiste à découper le domaine image Ω en sous-domaines $\{\Omega_i\}_{i=1}^M$ qui s'intersectent. Une partition de l'unité est une famille de fonctions ω_i continues, non-négatives et à support compact, qui vérifient les deux conditions suivantes :

$$\text{supp}(\omega_i) \subseteq \Omega_i, \quad (5.96)$$

et :

$$\sum_{i=1}^M \omega_i(\mathbf{x}) = 1. \quad (5.97)$$

La notation supp désigne le support d'une fonction, c'est-à-dire l'adhérence de l'ensemble des points où la fonction ne s'annule pas :

$$\text{supp}(\omega) = \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega \mid \omega(\mathbf{x}) \neq 0\}}. \quad (5.98)$$

En outre, si on choisit pour chaque sous-domaine Ω_i un espace d'approximation V_i , alors une fonction f peut être approximée sur chaque sous-domaine par un approximant «local» $s_i \in V_i$. L'approximant «global» est la somme des approximants locaux, pondérés par les fonctions qui forment une partition de l'unité :

$$s_f = \sum_{i=1}^M s_i \omega_i. \quad (5.99)$$

5.4. Réduction de la complexité

Cette méthode permet de respecter les propriétés d'interpolation : si chaque s_i est un interpolant sur $X_i \equiv X \cap \Omega_i$, alors s_f est un interpolant sur l'ensemble X tout entier. De plus, l'erreur d'approximation globale dépend directement de l'erreur d'approximation locale. En d'autres termes :

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}) - s_f(\mathbf{x})| &= \left| \sum_{i=1}^M (f(\mathbf{x}) - s_i(\mathbf{x})) \omega_i(\mathbf{x}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^M |f(\mathbf{x}) - s_i(\mathbf{x})| \omega_i(\mathbf{x}) \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq M} \|f - s_i\|_{L_\infty(\Omega_i)}. \end{aligned} \quad (5.100)$$

Dans [Wendland, 2002], Wendland propose une implémentation par $k - d$ arbres en dimension $d \geq 2$, ce qui permet de satisfaire aux hypothèses suivantes :

- Les points de contrôle à l'intérieur d'un sous-domaine sont facilement localisables ;
- La structure d'un sous-domaine est telle que :
 - chaque sous-domaine ne contient qu'un petit nombre de points,
 - chaque point de contrôle \mathbf{x} n'est contenu que dans un petit nombre de sous-domaines,
 - les sous-domaines peuvent être définis et accédés facilement ;
- Le nombre de sous-domaines est proportionnel au nombre de points de contrôle.

Avec ce type d'implémentation, les $\mathcal{O}(N)$ problèmes d'interpolation peuvent être résolus en un temps $\mathcal{O}(N)$. Avec une implémentation par *quadtree*, ces opérations peuvent être faites en $\mathcal{O}(\log N)$, avec un temps additionnel de $\mathcal{O}(N \log N)$ pour la construction de la structure d'arbre.

5.4.3 Méthodes multi-échelles avec des FBR à support compact

Dans le cas de fonctions de base à support compact ϕ , on peut ajuster la taille de support en fonction de la «densité spatiale» des points de contrôle avec un paramètre d'échelle h : $\phi_h = \phi(\cdot/h)$. Ainsi, on choisit h grand si la densité des points de contrôle est faible, et inversement. Plus précisément, la taille du support est fonction de la distance de remplissage :

$$h_{X,\Omega} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \min_{\mathbf{x}_i \in X} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|, \quad (5.101)$$

qui mesure la plus grande boule ouverte ne contenant pas de points de contrôle dans Ω . En choisissant une taille de support $h = \kappa h_{X,\Omega}$ pour les fonctions de base, avec $\kappa > 0$ un paramètre constant suffisamment petit, la matrice Q à inverser dans (5.20) est creuse et son inversion rapide. Pour le problème d'interpolation (5.19), le conditionnement - qui renseigne sur la stabilité numérique d'un système - de la matrice Q est déterminé par sa plus petite valeur propre, c'est-à-dire par :

$$\lambda_{\min}(Q) = \inf \left\{ \frac{\mathbf{c}^T Q \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} : \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ avec } S^T \mathbf{c} = 0 \right\}, \quad (5.102)$$

où la condition $S^T \mathbf{c} = 0$ est automatiquement vérifiée dans le cas où les **FBR** sont strictement positives définies. λ_{\min} peut être minoré par :

$$\lambda_{\min} \geq C q_X^{2\tau-d}, \quad (5.103)$$

où q_X est la distance de séparation entre la paire de points de contrôle les plus proches et $C > 0$ une constante indépendante de q_X et $\tau > d/2$. Notons que l'utilisation d'une matrice Φ_h , avec un ensemble de points de contrôle X , revient à utiliser une matrice Φ et l'ensemble X/h . En d'autres termes, l'interpolation sur X avec Φ_h peut être vue comme l'interpolation avec Φ sur l'ensemble X/h . La plus petite valeur propre de Φ est :

$$\lambda_{\min} \geq C \left(\frac{q_X}{h} \right)^{2\tau-d}. \quad (5.104)$$

Il est possible de montrer que l'erreur varie également en fonction de h . En fait, le choix de $h = \kappa h_{X,\Omega}$ permet d'avoir une erreur acceptable si, et seulement si, κ est suffisamment grand, ce qui contredit le fait que C devrait être le plus petit possible. Ce constat est appelé «relation d'incertitude» par Schaback [Schaback, 1995]. En pratique, il est souvent possible de faire un compromis pour trouver une taille adaptée pour le support des fonctions de base. Floater et Iske [Floater et Iske, 1996] proposent une approche multi-échelles avec un algorithme de décimation (ou «Thinning», en anglais), qui permet une interpolation numériquement stable tout en ayant une bonne qualité d'approximation. L'algorithme repose sur la décomposition de l'ensemble des points de contrôle $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ en une séquence de sous-ensembles emboîtés :

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_n. \quad (5.105)$$

Les sous-ensembles sont générés à partir de l'ensemble original, auquel des points de contrôle sont enlevés de manière itérative. Le critère pour enlever un point de contrôle est purement géométrique et repose sur la distance de séparation q_X . De cette manière, les points de contrôle d'un sous-ensemble ont une répartition spatiale qui est la plus uniforme possible par rapport à celle de l'ensemble original. Au final, les sous-ensembles de points de contrôle sont de densités spatiales décroissantes par rapport à l'ensemble original : les petites échelles correspondent à peu de points de contrôle et les grandes échelles à beaucoup de points de contrôle. Le schéma multi-échelles a la forme suivante :

$$s_1|_{X_1} = f|_{X_1}, \quad (5.106)$$

$$s_2|_{X_2} = (f - s_1)|_{X_2}, \quad (5.107)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad (5.108)$$

$$s_M|_{X_M} = \left(f - \sum_{i=1}^M s_i \right) \Big|_{X_M}. \quad (5.109)$$

Ce qui permet d'obtenir l'égalité :

$$(s_1 + \dots + s_M)|_X = f|_X. \quad (5.110)$$

Notons qu'il existe d'autres approches multi-échelles, où les données à approximer sont regroupées selon des critères géométriques. Ces techniques peuvent s'apparenter à de la classification non supervisée, ou «clustering» [McQueen, 1967]. Citons par exemple les approches de clustering basées sur des boules de Voronoï pour le rendu 3D d'objets [Ranjan et Fournier, 1994; Ranjan, 1996] et sur des disques de Voronoï [Tam, 2003] pour des applications en traitement d'image. Ces méthodes reposent sur un diagramme de Voronoï simplifié des données à approximer. Plus récemment, Gélis [Gelas et Prost, 2006] a proposé un algorithme multi-échelles basé sur du clustering de données en dimension quelconque avec des **FBR** à support compact. L'algorithme est itératif et reprend l'approche proposée par Dyn et *al.* [Dyn et *al.*,

5.5. Conclusion

2002b] en deux dimensions pour le critère de partitionnement des données en «clusters», ou cellules. À l'échelle $l = 0$ il n'y a qu'une seule cellule, qui est le domaine considéré. À l'échelle suivante, cette cellule est divisée en deux cellules, qui seront elles-mêmes redivisées, et ainsi de suite, suivant un seuil sur l'erreur moyenne quadratique par rapport aux données :

$$EMQ^l = \sum_{i=0}^{n-1} \left(z_i - f^l(\mathbf{x}_i) \right)^2, \quad (5.111)$$

où l est l'échelle considérée et z_i représente les mesures connues aux points de contrôle \mathbf{x}_i . Les cellules sont définies à l'aide de la matrice de covariance des points de contrôle. Le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de la matrice de covariance des points de contrôle permet de définir un hyperplan, qui coupe la cellule en deux et crée deux nouvelles cellules à l'échelle suivante. Dans chaque cellule, les points de contrôle sont regroupés en calculant la valeur moyenne en leur barycentre.

5.5 Conclusion

Nous avons présenté des techniques d'interpolation et d'approximation de données, suivant des fonctions polynomiales et des splines. Nous avons montré que l'utilisation de fonctions de base radiale permet d'interpoler ou d'approximer des données qui ne sont pas réparties de manière uniforme dans l'image. De plus, il est possible d'interpoler des données projetées, avec des fonctions de base qui minimisent une fonctionnelle d'énergie, traduisant la régularité et l'attachement aux données. Ces constats nous incitent à utiliser ce formalisme pour développer des modèles d'estimation du mouvement apparent sur des images de fluides géophysiques. Le cadre méthodologique des splines vectorielles autorise la formulation de modèles utilisant des points de contrôle, répartis non uniformément dans le domaine image, où une équation de transport est vérifiée. Sur le reste du domaine image, le mouvement est calculé par approximation vectorielle selon la contrainte de régularité **DR2O**.

Chapitre 6

Modèle d'estimation du mouvement fluide par spline vectorielle : implémentation par partition de l'unité

Nous abordons à présent les contributions essentielles de cette thèse, qui sont des modèles d'estimation du mouvement fluide. Les techniques d'interpolation ou d'approximation vectorielle basées sur les splines ont été utilisées en vision par ordinateur pour estimer le mouvement apparent. Leur principal intérêt est qu'elles permettent d'obtenir une solution unique, étant donné un ensemble de n points de contrôle non colinéaires. La solution minimise une fonctionnelle sur tout le domaine image, tout en vérifiant une équation de conservation sur les points de contrôle. Cependant, en pratique ces techniques sont inutilisables quand la valeur de n est grande. Elles nécessitent la résolution d'un système linéaire dense et l'évaluation de la solution en un point dépend de tous les points de contrôle. Ce chapitre présente un nouveau modèle d'estimation du mouvement fluide, **PUSP**, dans une approche par spline vectorielle pour des applications en météorologie et en océanographie. Ce modèle est adapté à l'estimation des fluides dont le mouvement est de divergence nulle ou non nulle dans le plan image. L'implémentation numérique du modèle est basée sur une décomposition spatiale du domaine image pour calculer rapidement la solution, et ce même lorsque le nombre de points de contrôle choisi est important.

6.1 Introduction

Les fonctions splines «plaque-mince» introduites par Duchon [Duchon, 1975; Duchon, 1976] minimisent la semi-norme de l'espace de Beppo-Levi. En dimension deux, Amodei [Amodei, 1991; Amodei et Benbourhim, 1991] a proposé un modèle d'interpolation (ou d'approximation) de vecteurs par des fonctions spline, pour des applications en météorologie et en océanographie. Les fonctions de base de l'interpolant minimisent la contrainte **DR2O**, une version pondérée de la semi-norme introduite par Duchon. Le choix de la contrainte **DR2O** dans ce modèle s'appuie sur le théorème d'Helmoltz, permettant de décomposer un champ de vecteurs en une partie solénoïdale et une partie irrotationnelle. Pour l'estimation du mouvement apparent, Suter [Suter, 1994] a proposé un modèle qui approxime des données projetées et vérifie la contrainte de régularité **DR2O** sur tout le domaine image. L'expression de la solution spline se fait en deux étapes : *i*) le calcul des coefficients réels, obtenus par la résolution d'un système linéaire ; *ii*) le calcul effectif de la solution spline, qui dépend de tous les points de contrôle. Ces deux étapes rendent le coût de l'algorithme prohibitif, dès lors que le nombre de points

Chapitre 6. Modèle d'estimation du mouvement fluide par spline vectorielle : implémentation par partition de l'unité

de contrôle sélectionnés est important. Dans ce chapitre, nous proposons un nouveau modèle d'estimation du mouvement apparent sur des séquences d'images de fluides géophysiques. Le modèle, appelé **PUSP**, utilise des fonctions splines vectorielles et peut estimer le mouvement à partir d'un grand nombre de points de contrôle.

En météorologie, le mouvement des masses d'air peut être assimilé à celui d'un fluide compressible. Le transport des particules de gaz atmosphérique est modélisé par l'**ECM**. En océanographie, le mouvement des eaux de la mer est incompressible et modélisé par l'**ECL**, qui correspond à un transport à divergence nulle et sans diffusion. L'**ECL** comme l'**ECM** sont utilisées sous l'hypothèse que l'on néglige les termes de source et de puits, ce qui est acceptable sur un intervalle de temps court.

Notre approche se place dans un cadre de spline vectorielle, vérifiant la contrainte de régularité **DR2O**, et permet d'obtenir une solution rigoureuse, pour un problème formulé en interpolation ou en approximation, si les données sont bruitées. Le mouvement est déterminé à partir d'un ensemble de points de contrôle, où l'information est exploitable : zones contrastées avec mouvement apparent non nul. Cette étape de sélection des points de contrôle se fait par un double seuillage, basé sur des critères locaux et un indice de mouvement. Afin d'estimer le mouvement à partir d'un très grand nombre de points de contrôle et sur des images de grande taille, le modèle **PUSP** effectue une décomposition spatiale du domaine. Le modèle résout ainsi localement plusieurs problèmes d'interpolation (ou d'approximation) dans des sous-domaines de l'image, qui contiennent un petit nombre de points de contrôle. Cette approche est plus rapide et numériquement plus stable que la résolution d'un unique problème sur toute l'image. Le calcul de la solution du modèle **PUSP** se fait en deux étapes : *I*) le calcul d'un approximant «local» dans chaque sous-domaine de l'image *II*) la «fusion» des approximations par des **FBR** à support compact, qui vérifient une partition de l'unité. Le résultat final est un champ de vecteurs «lisse» dont les caractéristiques sont celles des approximations locales : le champ de mouvement estimé vérifie la contrainte de régularité **DR2O**, sur tout le domaine image, et l'équation de conservation aux points de contrôle sélectionnés.

Le chapitre est présenté de la manière suivante : nous commençons par décrire les modèles utilisés pour calculer les approximations locales. Puis, nous détaillons l'implémentation numérique du modèle : le nombre de points de contrôle et l'absence de garantie sur la régularité de leur répartition spatiale nous incite à considérer une approche par partition de l'unité. Le domaine image est subdivisé en sous-domaines qui s'intersectent, et dans chacun desquels sont calculés des approximations. Chacun des sous-domaines contient un nombre de points de contrôle compris entre des valeurs minimale et maximale. Ces approximations sont ensuite «fusionnées» à l'aide de **FBR**, à support compact, de la taille des sous-domaines. Ces fonctions jouent le rôle de pondération entre les différents approximations calculés dans les sous-domaines.

6.2 Estimation du mouvement fluide par spline vectorielle

Nous présentons les modèles utilisés pour l'estimation du mouvement fluide dans les cas *a*) incompressible 2D et *b*) compressible ou incompressible 3D. Nous supposons que les points de contrôle ont déjà été sélectionnés et nous ne nous intéressons qu'à l'estimation du mouvement. Nous reviendrons sur l'étape de sélection plus loin dans ce chapitre.

6.2.1 Estimation du mouvement fluide 2D

Le modèle d'estimation du mouvement fluide repose sur le modèle introduit par Suter [Suter, 1994] et décrit dans le chapitre 5. Ce modèle permet de trouver un champ de vecteurs spline

6.2. Estimation du mouvement fluide par spline vectorielle

solution du problème :

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n (\nabla_i \mathbf{w} + I t_i)^2 + \lambda \int_{\Omega} \alpha \|\nabla \operatorname{div}(\mathbf{w})\|^2 + \beta \|\nabla \operatorname{rot}(\mathbf{w})\|^2 dx dy \right\}, \quad (6.1)$$

où Ω est le domaine image. Nous appliquons ce modèle sur les données océanographiques, car l'eau en mouvement peut être considérée comme un fluide incompressible, et modélisée par l'**ECL**. Par ailleurs, sur les images de température de l'océan, la divergence horizontale est faible et les structures présentent des tourbillons de tailles variées : la contrainte de régularité **DR2O** semble donc bien adaptée.

6.2.2 Estimation du mouvement fluide compressible ou incompressible 3D

Nous proposons de définir un nouveau modèle, nommé **PUSP**, pour le cas des fluides compressibles, en nous basant sur l'équation de conservation de la masse, ou **ECM**, au lieu de celle de la luminance. Ce modèle est utilisé pour les applications météorologiques. Ses caractéristiques sont les suivantes : nous estimons le mouvement à partir de points de contrôle où l'**ECM** est effectivement vérifiée. Nous choisissons d'utiliser la contrainte de régularité **DR2O** et réalisons l'estimation du mouvement sur l'image par interpolation ou par approximation à partir de ces points de contrôle. Étant donné un ensemble de points de contrôle non colinéaires $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$ du plan image, nous cherchons un champ de vecteurs spline, qui soit solution du problème :

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n (\mathbf{L}_i \mathbf{w} + I t_i)^2 + \lambda \int_{\Omega} \alpha \|\nabla \operatorname{div}(\mathbf{w})\|^2 + \beta \|\nabla \operatorname{rot}(\mathbf{w})\|^2 dx dy \right\}, \quad (6.2)$$

où Ω est le domaine image et \mathbf{L} est un opérateur linéaire défini par :

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{L}(\cdot) = \langle \nabla I(\mathbf{x}) + I(\mathbf{x}) \nabla \cdot, \cdot \rangle, \quad (6.3)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ étant le produit scalaire usuel. La solution du problème (6.2) s'exprime sous la forme d'une somme de deux termes :

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{L}_i \mathbf{K}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) + \sum_{i=1}^M d_i p(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (6.4)$$

Les coefficients $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$ sont réels et les fonctions de base :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{xy} & K_{yy} \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

sont des dérivées de la fonction spline «plaque-mince» :

$$K(\|\mathbf{x}\|) = C \|\mathbf{x}\|^4 \log(\|\mathbf{x}\|), \quad (6.6)$$

où C est une constante. Les fonctions de base de l'équation (6.4) ont été présentées dans le chapitre 5 et minimisent la contrainte de régularité **DR2O**. Les polynômes p de degré 1 forment l'espace nul de la contrainte de régularité **DR2O** et :

$$M = \binom{m+1}{d},$$

Chapitre 6. Modèle d'estimation du mouvement fluide par spline vectorielle : implémentation par partition de l'unité

où $d = 2$ est la dimension du problème et $m = 2$ est l'ordre de la spline, soit $M = 3$. L'opérateur \mathbf{L} utilise l'opérateur différentiel de divergence, qui nécessite de dériver la fonction mère K . Le calcul des dérivées peut s'avérer complexe, notamment pour le calcul des coefficients de la solution, puisque l'opérateur est appliqué deux fois (suivant les lignes et les colonnes de $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)$). Lorsque la fonction mère du modèle est dérivée à l'ordre 4, suivant x ou y , on peut avoir des singularités à l'origine, comme montré sur la figure 6.1. Pour cette raison, nous choisissons d'utiliser un opérateur discret $\bar{\mathbf{L}}$, en utilisant des masques de différences finies pour calculer les dérivées. Par exemple, si on applique l'opérateur $\bar{\mathbf{L}}$ à la fonction K_{xx} dans la direction y , on note :

$$K_{xx}^{\bar{y}}(x, x_i, y, y_i) \simeq \frac{1}{2} (K(x, x_i, y + 1, y_i) - K(x, x_i, y - 1, y_i)). \quad (6.7)$$

Ainsi, en développant l'équation (6.4) avec les notations précédentes on obtient :

$$\mathbf{w} = \begin{cases} c_i \left(I_{x_i} \left(\frac{1}{\alpha} K_{xx} + \frac{1}{\alpha} K_{yy} \right) + I_{y_i} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) K_{xy} + I_i \left(\frac{1}{\alpha} K_{xx}^{\bar{x}_i} + \frac{1}{\beta} K_{yy}^{\bar{x}_i} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) K_{xy}^{\bar{x}_i} \right) \right) + \mathbf{p}(\mathbf{x}) \\ c_i \left(I_{x_i} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) K_{xy} + I_{y_i} \left(\frac{1}{\alpha} K_{xx} + \frac{1}{\alpha} K_{yy} \right) + I_i \left(\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) K_{xy}^{\bar{y}_i} + \frac{1}{\beta} K_{xx}^{\bar{y}_i} + \frac{1}{\alpha} K_{yy}^{\bar{y}_i} \right) \right) + \mathbf{q}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (6.8)$$

L'opérateur \mathbf{L} a été appliqué à la fonction mère K , considérée comme une fonction de \mathbf{x}_i , avec \mathbf{x} fixé, soit $K_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_i)$. Les polynômes $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = d_1 + d_2 x_i + d_3 y_i$ et $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = d_4 + d_5 x_i + d_6 y_i$ sont de degré 1. Les coefficients de la solution sont trouvés en posant les conditions d'approximation, *i.e.* que l'ECM doit être vérifiée aux points de contrôle :

$$\nabla I_i \mathbf{w} + I_i \text{div}(\mathbf{w}) = -I_i t_i, \quad i = 1 \dots n,$$

sous la contrainte que $\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{L}_i p(\mathbf{x}_i) = 0$, avec p des polynômes de degré au plus un, pour garantir une solution unique. Sous forme matricielle, on résout un système de la même forme que dans (5.90). La matrice Q est de terme général :

$$\bar{\mathbf{L}}_i \bar{\mathbf{L}}_j \mathbf{K}(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|). \quad (6.9)$$

Plus précisément, on obtient une matrice Q de terme général :

$$\begin{aligned} Q_{ij} = & I_{x_j} I_{x_i} \left(\frac{1}{\alpha} K_{xx} + \frac{1}{\beta} K_{yy} \right) + (I_{y_j} I_{x_i} + I_{x_j} I_{y_i}) \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) K_{xy} + I_{y_j} I_{y_i} \left(\frac{1}{\alpha} K_{yy} + \frac{1}{\beta} K_{xx} \right) + \\ & I_{x_j} I_i \left(K_{xx}^{\bar{x}_i} \frac{1}{\alpha} + K_{yy}^{\bar{x}_i} \frac{1}{\beta} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) K_{xy}^{\bar{x}_i} \right) + I_{y_j} I_i \left(K_{yy}^{\bar{y}_i} \frac{1}{\alpha} + K_{xx}^{\bar{y}_i} \frac{1}{\beta} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) K_{xy}^{\bar{y}_i} \right) + \\ & I_j I_{x_i} \left(K_{xx}^{\bar{x}_j} \frac{1}{\alpha} + K_{yy}^{\bar{x}_j} \frac{1}{\beta} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) K_{xy}^{\bar{x}_j} \right) + I_j I_{y_i} \left(K_{yy}^{\bar{y}_j} \frac{1}{\alpha} + K_{xx}^{\bar{y}_j} \frac{1}{\beta} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) K_{xy}^{\bar{y}_j} \right) + \\ & I_i I_j \left(\frac{1}{\alpha} K_{xx}^{\bar{x}_i \bar{x}_j} + \frac{1}{\beta} K_{yy}^{\bar{x}_i \bar{x}_j} + \frac{1}{\alpha} K_{yy}^{\bar{y}_i \bar{y}_j} + \frac{1}{\beta} K_{xx}^{\bar{y}_i \bar{y}_j} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) K_{xy}^{\bar{x}_i \bar{x}_j} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) K_{xy}^{\bar{y}_i \bar{y}_j} \right). \end{aligned} \quad (6.10)$$

de taille $n \times n$. La matrice S est obtenue en appliquant l'opérateur \mathbf{L} à l'espace nul de la contrainte de régularité **DR2O**, de dimension 6, qui est engendré par les polynômes de degré

6.2. Estimation du mouvement fluide par spline vectorielle

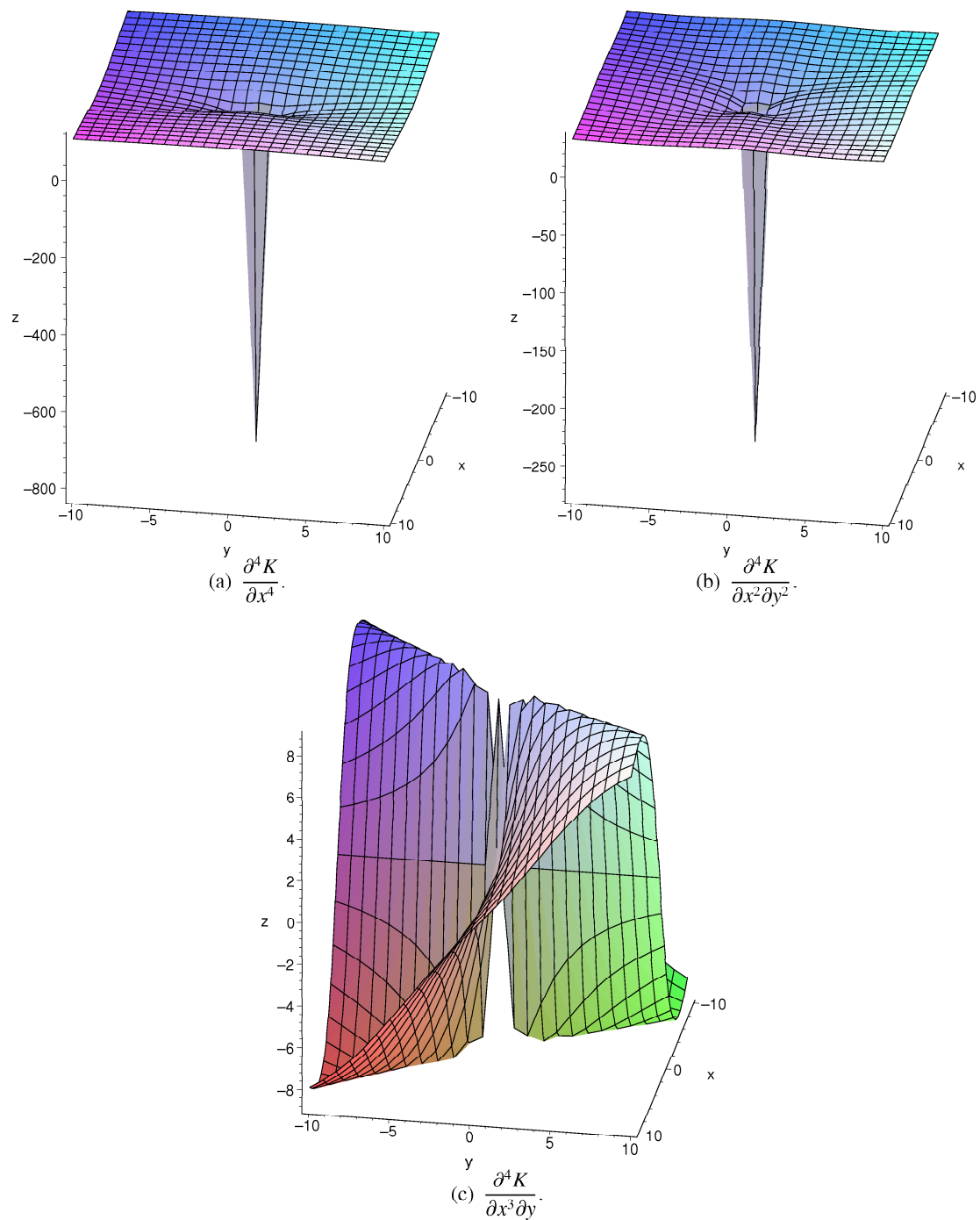


FIG. 6.1 – Exemples de dérivées de $K = \mathbf{r}^4 \log \mathbf{r}$ à l'ordre 4 suivant x et y sur un domaine $\Omega = [-10, 10] \times [-10, 10]$.

au plus 1 :

$$p = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right\}. \quad (6.11)$$

On obtient une matrice S de terme général :

$$S = \mathbf{L}_i p = \left\{ I_{x_i}, I_{x_i}x_i + I_i, I_{x_i}y_i, I_{y_i}, I_{y_i}x_i, I_{y_i}y_i + I_i \right\}_{i=1}^n. \quad (6.12)$$

de taille $n \times 6$.

6.3 Implémentation du modèle

6.3.1 Constat sur l'information «image» exploitable

L'approche se base sur la sélection d'un sous-ensemble de l'image pour estimer le mouvement apparent. Certaines endroits de l'image ne fournissent pas d'information exploitable pour l'estimation du mouvement apparent. Les zones non contrastées de l'image en font partie. En outre, dans certaines parties de l'image le mouvement est nul ou dans une configuration qui empêche son estimation (mouvement perpendiculaire au gradient spatial). Afin de sélectionner les points de contrôle, dont les valeurs dérivées des luminances sont représentatives du mouvement dans les images, nous faisons un double seuillage :

- Seuillage sur la norme du gradient :

$$\|\nabla I\| \geq \sigma_1, \quad (6.13)$$

pour ne considérer que les régions contrastées dans les images ;

- Seuillage sur un indice de mouvement :

$$\frac{|It|}{\|\nabla I\|} \geq \sigma_2, \quad (6.14)$$

pour ne prendre en compte que les régions où le mouvement n'est pas nul dans les images.

Cette étape nous amène à faire un double constat. D'une part, les points de contrôle sélectionnés dans les images sont très nombreux et dépendent directement des valeurs de seuils choisies pour σ_1 et σ_2 . D'autre part, le choix des points de contrôle est dépendant de l'information image utilisable. Il n'y a donc pas de garantie que leur répartition spatiale soit régulière. Un exemple de points de contrôle sélectionnés à l'aide de valeurs σ_1 et σ_1 est présenté sur la figure 6.2. Le grand nombre et la répartition spatiale, possiblement irrégulière, des points de contrôle sélectionnés nous incitent à formuler une stratégie adaptée pour le calcul de la solution. Nous optons pour une implémentation du modèle par partition de l'unité. Le principe de cette méthode est décrit brièvement dans le chapitre 5, et repose sur la décomposition spatiale du domaine image en sous-domaines qui s'intersectent. La méthode permet de considérer un très grand nombre de points de contrôle dans le calcul rapide d'une solution spline vérifiant la contrainte de régularité **DR2O**. Dans la section suivante, nous détaillons un algorithme fondé sur cette méthode et employé par le modèle **PUSP**.

²Nous remercions Marina Lévy du LOCEAN de nous avoir fourni ces simulations réalisées par le modèle **OPA**.

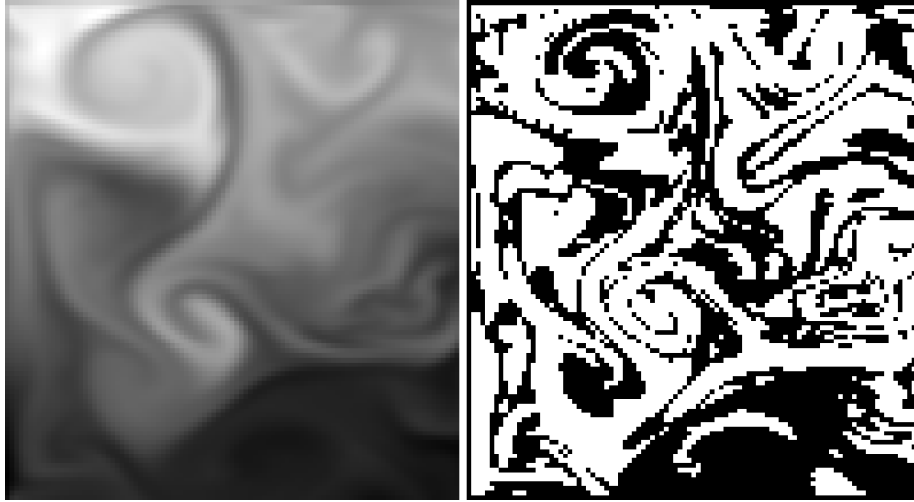


FIG. 6.2 – *Gauche* : Image SST² ; *Droite* : Points de contrôle sélectionnés (6050, en blanc, sur un total de 10791 pixels) par seuillage, avec $\sigma_1 = 0.03$ et $\sigma_2 = 0.3$, pour des images de valeurs comprises entre 0 et 1.

6.3.2 Décomposition spatiale du domaine image

Nous subdivisons l'image en cellules $\{C_i\}_{i=1}^N$ rectangulaires, grâce à une décomposition *quadtree*. A l'étape d'initialisation, une seule cellule existe : l'image entière. A chaque cellule C_i est attaché un disque D_i , dont le rayon R_i est proportionnel à la diagonale principale de la cellule $dg(C_i)$:

$$R_i = \kappa dg(C_i), \quad (6.15)$$

où κ est le facteur de proportionnalité ($\kappa = 0.75$ dans nos expérimentations). Le processus de subdivision en cellules se fait en fonction d'un seuil sur le nombre de points de contrôle pouvant être contenus dans le disque : tant que ce nombre de points est supérieur à la valeur d'un seuil n_{MAX} fixé, la cellule courante est subdivisée en quatre. Elle donne ainsi lieu à quatre nouvelles cellules, pour lesquelles le processus de subdivision est itéré, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les disques ne contiennent pas plus qu'un nombre n_{MAX} de points de contrôle.

L'ensemble des disques attachés aux cellules du *quadtree* forme maintenant un ensemble de sous-régions qui s'intersectent entre elles dans l'image, et sur lesquelles peuvent être calculés les approximants définis dans la section précédente. Cependant, à l'intérieur de certains disques il est possible que le nombre de points de contrôle soit nul ou insuffisant pour calculer un approximant. En effet, la sélection des points de contrôle est dépendante de l'information image exploitable, et ceux-ci sont généralement répartis irrégulièrement dans l'espace. Pour pallier à ce problème, nous fixons un seuil minimum n_{MIN} de points de contrôle devant être contenus dans un disque. Si un disque C_i ne contient pas assez de points de contrôle, alors son rayon est augmenté jusqu'à ce qu'il en contienne suffisamment :

$$R_i = R_i + \delta R_i, \quad (6.16)$$

où δ est le pas d'augmentation du rayon (nous prenons $\delta = 0.05$ dans nos expérimentations). Finalement, l'espace image est partitionné en M sous-régions de l'espace image : des disques de rayon R_i , dans lesquels le mouvement est calculé à partir d'un nombre de points de contrôle compris entre n_{MIN} et n_{MAX} .

6.4 Partition de l'unité

Nous proposons une approche par partition de l'unité pour fusionner les approximants calculés dans les disques D_i . On considère des fonctions d'influence :

$$\phi_i = \phi\left(\frac{\|\mathbf{x} - c_i\|}{R_i}\right), \quad (6.17)$$

centrées sur chacune des cellules C_i de centre c_i . Les fonctions ϕ_i sont des **FBR** à support compact [Wendland, 1995; Buhmann, 2001]. Les fonctions de base ϕ_i sont normalisées pour satisfaire à une partition de l'unité :

$$\Psi_i(\mathbf{x}) = \frac{\phi_i(\mathbf{x})}{\sum_{k=1}^M \phi_k(\mathbf{x})}. \quad (6.18)$$

Le champ de mouvement global s'exprime alors comme la somme des approximants locaux, pondérés par les **FBR** de support R_i :

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M \Psi_i(\mathbf{x}) \mathbf{w}_i(\mathbf{x}). \quad (6.19)$$

La solution conserve les propriétés des approximants locaux : équation de conservation vérifiée aux points de contrôle et régularité sur la divergence et le rotationnel du champ de mouvement sur tout le domaine image.

6.5 Conclusion

Nous avons présenté un modèle d'estimation du mouvement fluide, nommé **PUSP**, dans un cadre de splines vectorielles. Le modèle utilise l'**ECM** et la contrainte de régularité **DR2O** dans le cas d'écoulements compressibles ou incompressibles 3D, et l'**ECL** et la contrainte de régularité **DR2O** dans le cas d'écoulements incompressibles 2D. La solution calculée est rigoureuse si les points de contrôle ne sont pas tous colinéaires, et l'estimation du mouvement peut se faire à partir d'un large ensemble de points de contrôle, dans un temps de calcul raisonnable. Ceci n'était pas possible avec les méthodes standards existantes, qui utilisent des fonctions de base «globales» et résolvent un unique problème d'approximation sur tout le domaine image.

Chapitre 7

Estimation et représentation multi-échelles du champ de mouvement

Ce chapitre présente un nouveau modèle d'estimation multi-échelles du mouvement, **AMSV (Approximation multiéchelles et Splines Vectorielles)**, ainsi qu'une méthode de représentation multi-échelles d'un champ de vecteurs calculé à pleine résolution. Le modèle et la méthode utilisent une fonction mère à support compact, issue du quasi-interpolant vérifiant la contrainte de régularité **DR2O**. Le champ de mouvement approximé est calculé à partir de données situées sur une grille non-régulière, et les échelles sont définies par une séquence de sous-ensembles emboîtés de points de contrôle. Ceux-ci sont générés par un algorithme de décimation, avec une implémentation par arbres binaires pour optimiser le temps de calcul.

7.1 Introduction

Les fluides géophysiques observés sur les images satellite présentent des structures particulières : front, tourbillon et filament. Lorsque le mouvement est turbulent, les structures sont principalement tourbillonnaires, de taille et durée variées. Pour que ces structures puissent être prises en compte par les modèles, il est nécessaire d'avoir une formulation multi-échelles. Or, les modèles utilisant les fonctions de base «globales», et vérifiant la contrainte de régularité **DR2O**, ne permettent pas une telle formulation. Nous définissons dans ce chapitre : 1) un modèle permettant d'estimer le mouvement de fluides géophysiques à des échelles variées, avec la contrainte de régularité **DR2O** et l'**ECL** ; 2) une méthode de représentation multi-échelles d'un champ de vecteurs calculé à pleine résolution. Le modèle et la méthode présentés exploitent un ensemble de points de contrôle sélectionnés dans les images selon des critères locaux. Le mouvement étant estimé sur toute l'image, à partir des ces points de contrôle, nous choisissons de définir différentes échelles à partir de ceux-ci : les points de contrôle «espacés» correspondent à une estimation du mouvement à basse échelle, «grossier», tandis que les points de contrôle «proches» correspondent à une estimation plus «fine» des mouvements dans les images. Puisque les points de contrôle ont une répartition spatiale très irrégulière, car sélectionnés en fonction de l'information image exploitable, il n'est pas possible de faire un simple sous-échantillonnage de ces points pour générer les différentes échelles. En effet, un sous-échantillonnage classique ne permet pas d'enlever des points de contrôle de manière «uniforme». Dans le modèle et la méthode présentés, les sous-ensembles de points de contrôle sont générés par un algorithme de **Thinning**, que nous traduisons par «**décimation**», créé par Floater et Iske [Floater et Iske, 1996; Iske, 2004]. Cet algorithme définit des sous-ensembles,

de densité spatiale décroissante par rapport à l'ensemble original. Les points de contrôle sont «décimés» (*i.e.* enlevés) itérativement, d'après un critère géométrique de distance. De cette manière, la répartition spatiale des points reste la plus uniforme possible par rapport à celle des points de contrôle de l'ensemble original. Aux basses échelles, les points sont éloignés les uns des autres. Aux hautes échelles (fines), la densité de points est forte. L'algorithme calcule la triangulation de Delaunay des points de contrôle considérés, ainsi que son graphe dual, le diagramme de Voronoï. Ces deux représentations permettent de sélectionner rapidement le point à enlever. L'implémentation numérique utilise une structure de tas binaire. La complexité de l'algorithme de décimation est en $O(n \log n)$, n étant le nombre initial de points de contrôle.

L'approche multi-échelles proposée par Floater et Iske [Floater et Iske, 1996], associée à l'algorithme de décimation, utilise les **FBR** à support compact définies par Wendland [Wendland, 1995] et décrites dans le chapitre 5. Ces fonctions ont un degré de continuité arbitraire, mais ne permettent pas d'approximer un champ de vecteurs en contrôlant ses variations en divergence et en vorticité. L'approche multi-échelles, que nous proposons, emploie une fonction mère, issue du quasi-interpolant vérifiant la contrainte de régularité **DR2O**. Ce quasi-interpolant est initialement défini sur une grille régulière, de pas h [Amodei et Benbourhim, 1994]. La fonction mère obtenue par une discrétisation du système différentiel (5.40) associé au problème d'interpolation (5.38) est à décroissance rapide, mais pas à support compact. Dans cette étude, plutôt que de tronquer la fonction mère au delà d'un seuil arbitraire, ce qui pourrait avoir des effets indésirables sur la qualité de l'approximation (artéfacts), nous considérons une nouvelle fonction mère en faisant le produit d'une fonction radiale à support compact par la fonction mère du quasi-interpolant défini par Amodei. La fonction, ainsi obtenue, garde les propriétés d'approximation de celle du quasi-interpolant, c'est-à-dire qu'elle permet le contrôle des variations, en divergence et en vorticité, du champ de mouvement, et son support compact permet un schéma multi-échelles. Comme cette fonction est utilisée sur une grille non régulière, le choix de la taille de son support est délicat. Nous le choisissons en fonction de la densité spatiale des points de contrôle considérés et de la *distance de remplissage* (équation (5.101)).

Le chapitre est présenté comme suit : nous commençons par décrire brièvement l'algorithme de décimation et son implémentation. Ensuite, nous décrivons le modèle permettant d'estimer le mouvement à différentes échelles conformément à la contrainte de régularité **DR2O** et à la vérification de l'**ECL** sur les points de contrôle. Enfin, nous décrivons une méthode permettant de représenter, à différentes échelles, avec la régularité **DR2O**, un champ de vecteurs calculé à pleine résolution.

7.2 Algorithme de décimation

L'algorithme de décimation, que nous utilisons, engendre une séquence de sous-ensembles emboîtés dans l'ensemble original $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$:

$$X_{n-N} \subset X_{n-N+1} \subset \dots \subset X_{n-1} \subset X_n = X. \quad (7.1)$$

Chacun des sous-ensembles sert à définir une échelle spatiale pour le calcul du champ de mouvement.

L'algorithme est itératif. A la première itération, il prend en entrée l'ensemble original, et enlève un point de contrôle. L'algorithme génère ainsi un sous-ensemble X_{n-1} , de taille $\text{Card}(X_{n-1}) = n - 1$. Le processus est itéré, en utilisant le sous-ensemble généré à l'étape précédente comme entrée, jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit atteint. Le critère de sélection des points à décimer est purement géométrique. Pour chaque sous-ensemble $Y \subset X$, on définit

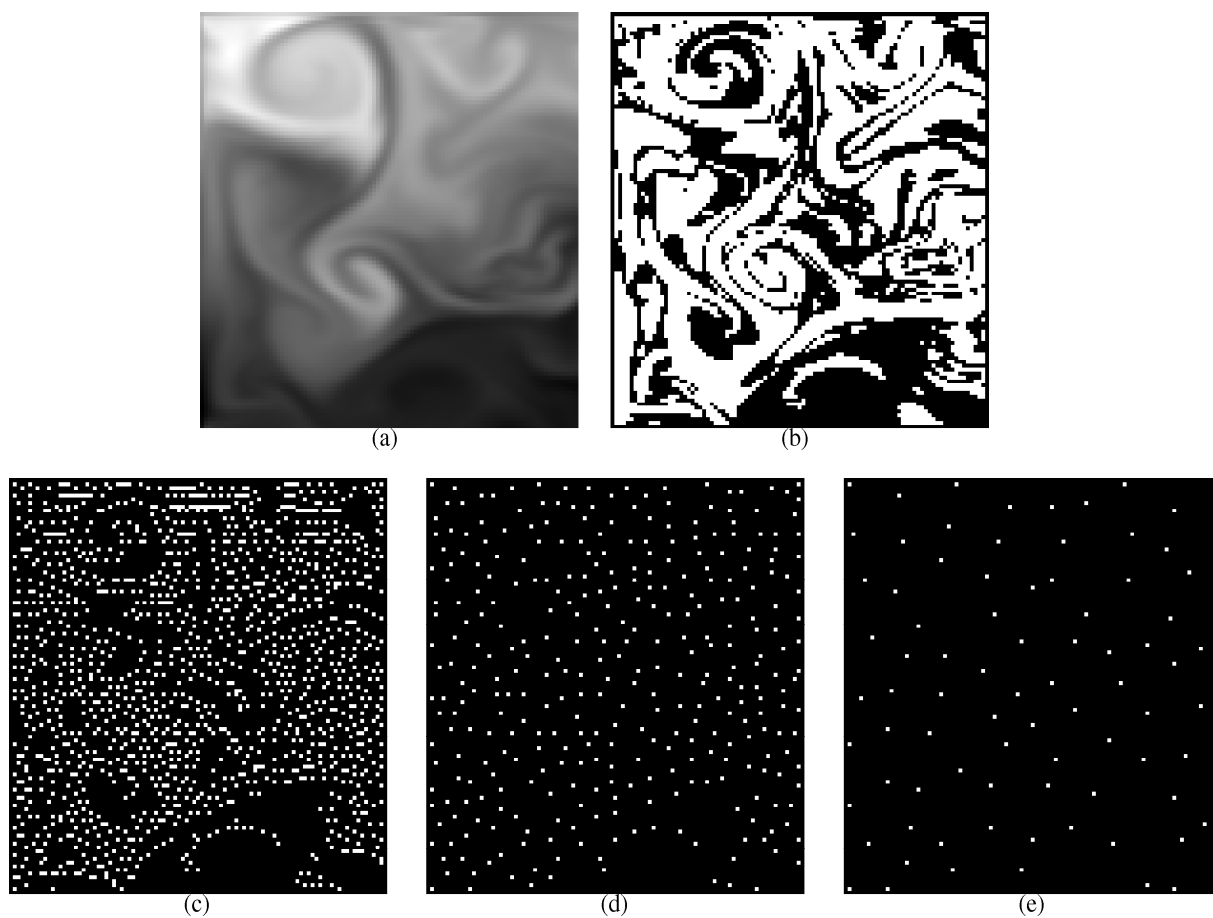


FIG. 7.1 – Sous-ensembles générés par l’algorithme de décimation. (a) Image SST simulée ; (b) Points de contrôle initiaux (en blanc, 6050) ; (c) 1338 points ; (d) 334 points ; (e) 85 points.

le *rayon couvrant* par rapport à X :

$$r_{Y,X} = \max_{\mathbf{x} \in X} d_Y(\mathbf{x}), \quad (7.2)$$

sachant que $d_Y(\mathbf{x})$ est la distance entre le point de contrôle $\mathbf{x} \in X$ et Y :

$$d_Y(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y} \in Y} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|. \quad (7.3)$$

Pour tout $Y \subset X$, avec $\text{Card}(Y) \geq 2$, le point qui a le plus petit rayon couvrant $r_{Y \setminus \mathbf{y}, X}$ parmi tous les points de Y est dit *supprimable*. On note ce point \mathbf{y}^e . Il vérifie la relation :

$$r_{Y \setminus \mathbf{y}^e, X} = \min_{\mathbf{y} \in Y} r_{Y \setminus \mathbf{y}, X}. \quad (7.4)$$

Ce critère permet donc de sélectionner le point à enlever en fonction des points de contrôle du sous-ensemble courant Y et de l'ensemble des points de contrôle déjà enlevés $Z = X \setminus Y$. Un exemple de représentation graphique des attributs locaux des ensembles X et Y (équations (7.2), (7.3) et (7.4)) est illustré par la figure 7.2. Les croix noires représentent les points de contrôles de X et les croix rouges entourées ceux de Y . Les attributs locaux $d_Y(\mathbf{x})$ des ensembles X et $Y \setminus \mathbf{y}$ sont représentés par des traits en pointillés. Les traits en pointillés verts représentent $r_{Y \setminus \mathbf{y}, X}$. Dans cet exemple, le point à enlever est $\mathbf{y}^e = \mathbf{y}_3$, car c'est le point de contrôle qui a la plus petite valeur $r_{Y \setminus \mathbf{y}, X}$ (figure (d)). D'autres critères géométriques semblables à (7.4) ont été utilisés pour la décimation des points de contrôle [Floater et Iske, 1996]. Le critère que nous utilisons est employé dans [Dyn et al., 2002a; Iske, 2004].

L'utilisation du critère (7.4) peut paraître très coûteuse en temps de calcul, notamment lorsque le nombre de points de contrôle de X est important. En effet, pour chaque point $\mathbf{y} \in Y$ que l'on teste, il est nécessaire de calculer sa distance à tous les points de X . Si on considère le diagramme de Voronoï de Y et un critère défini de manière plus locale, le *rayon couvrant local* [Iske, 2004], il est possible de réduire ce temps de calcul. On note $\mathcal{V}_Y(\mathbf{y})$ la cellule de Voronoï de centre \mathbf{y} , de l'ensemble Y . Considérons l'ensemble $Y \subset X$, de taille $\text{Card}(Y) \geq 2$. Tout point de $\mathbf{y} \in Y$ qui minimise le rayon couvrant local :

$$r(\mathbf{y}) = r_{Y \setminus \mathbf{y}, X \cap \mathcal{V}_Y(\mathbf{y})}, \quad (7.5)$$

parmi tous les points de Y , est dit *supprimable*. L'algorithme de décimation utilise le diagramme de Voronoï \mathcal{V}_Y de Y pour déterminer le plus petit rayon couvrant local de Y . En pratique, le calcul de $r(\mathbf{y})$ est facilité par la triangulation de Delaunay \mathcal{D}_Y de Y , graphe dual de \mathcal{V}_Y . Ces deux types de représentation géométrique d'un ensemble de points de contrôle sont introduits dans la section suivante et illustrés par la figure 7.3.

7.2.1 Triangulation de Delaunay et diagramme de Voronoï

Le diagramme de Voronoï et la triangulation de Delaunay sont utilisés en géométrie algorithmique et, de manière avantageuse, dans l'algorithme de décimation introduit dans la section 7.2. Le diagramme de Voronoï est l'ensemble des *cellules de Voronoï* $\{\mathcal{V}_X(\mathbf{x})\}_{\mathbf{x} \in X}$ de X . Tous les points \mathbf{y} , plus proches de \mathbf{x} que de n'importe quel autre point de X appartiennent, à la cellule de Voronoï $\mathcal{V}_X(\mathbf{x})$. Autrement dit, étant donné un ensemble fini $X \subset \mathbb{R}^2$ de points dans le plan, pour tout $\mathbf{x} \in X$, l'ensemble des points :

$$\mathcal{V}_X(\mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \min_{\bar{\mathbf{x}} \in X} \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\| \right\} \subset \mathbb{R}^2 \quad (7.6)$$

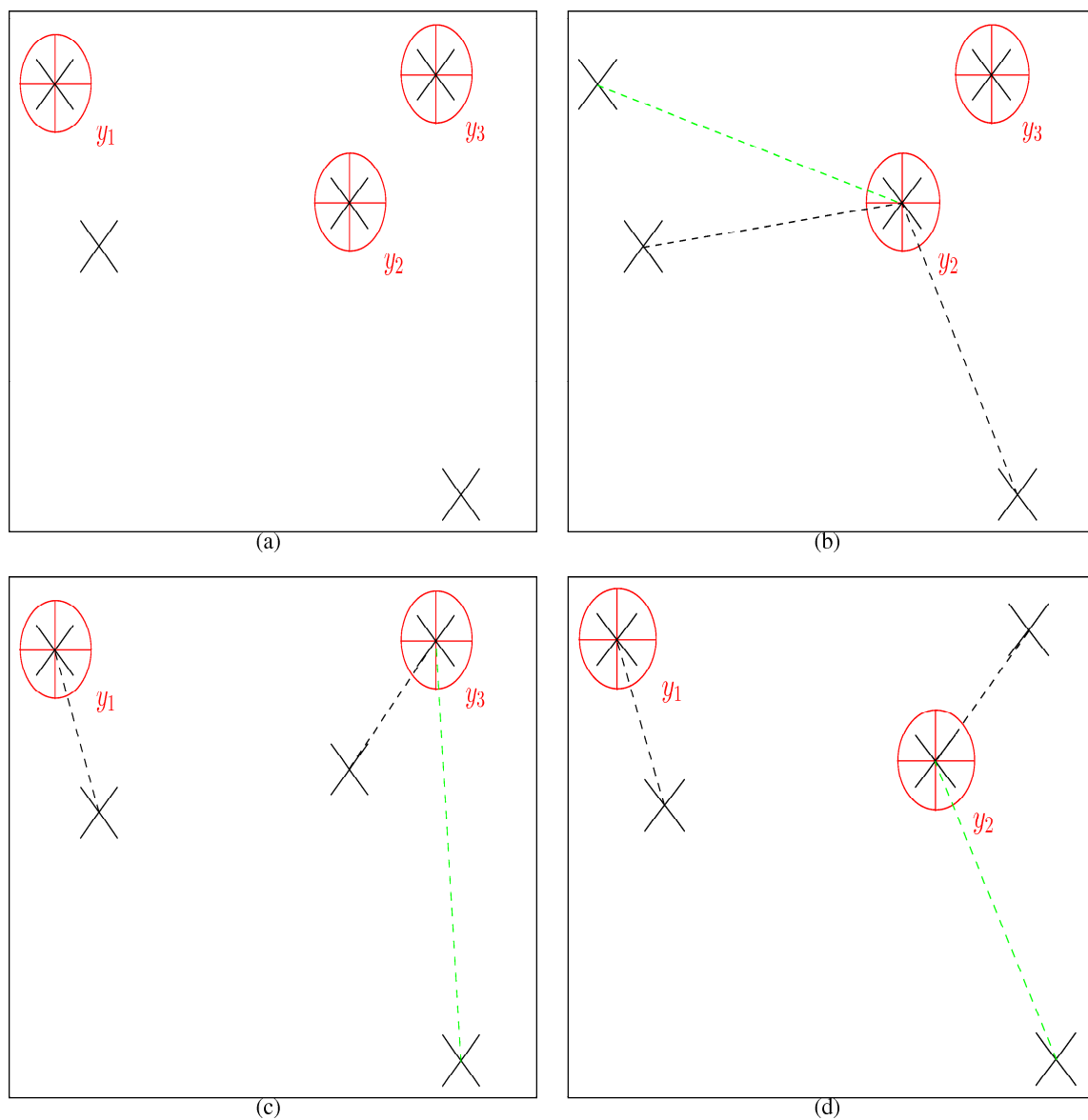


FIG. 7.2 – Calcul du plus petit rayon couvrant $\min_{y \in Y} r_{Y \setminus y, X}$ des ensembles X et $Y \subset X$. (a) Ensembles X et Y ; (b) Ensembles X et $Y \setminus y_1$; (c) Ensembles X et $Y \setminus y_2$; (d) Ensembles X et $Y \setminus y_3$.

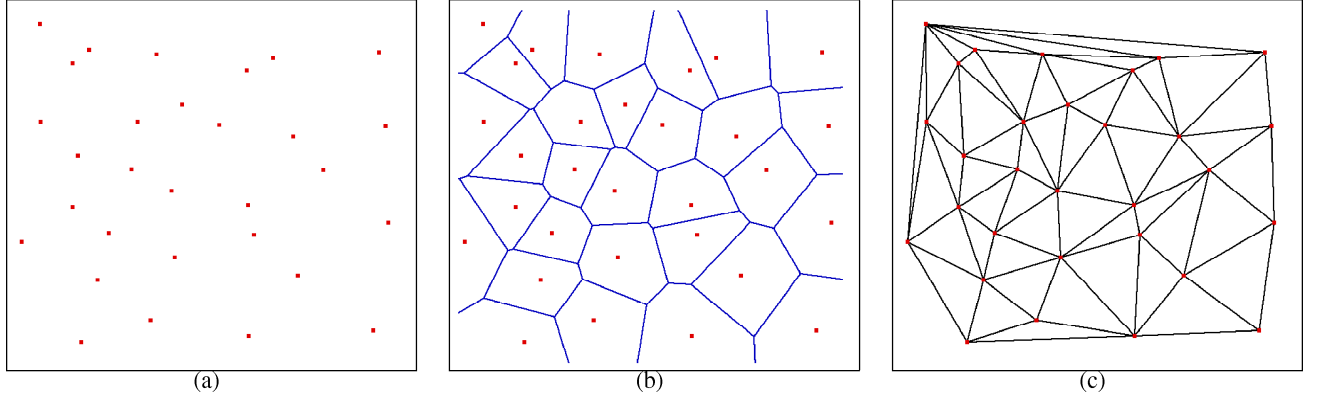


FIG. 7.3 – Triangulation de Delaunay et diagramme de Voronoï d'un ensemble de points. (a) Ensemble de 30 points ; (b) Diagramme de Voronoï ; (c) Triangulation de Delaunay.

est une *cellule de Voronoï*. Le diagramme de Voronoï est une partition de l'espace euclidien :

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{\mathbf{x} \in X} \mathcal{V}_X(\mathbf{x}). \quad (7.7)$$

Si $\|\cdot\|$ est la distance euclidienne, chaque cellule de Voronoï $\mathcal{V}_X(\mathbf{x})$ constitue un polyèdre fermé et convexe, dont les sommets sont appelés *points de Voronoï*. Deux cellules de Voronoï distinctes $\mathcal{V}_X(\mathbf{x})$ et $\mathcal{V}_X(\mathbf{y})$ sont disjointes, sinon elles ont une arête commune et dans ce cas les points $\mathbf{x} \in X$ et $\mathbf{y} \in X$ sont appelés *voisins de Voronoï*. En connectant les voisins de Voronoï entre eux, on obtient le graphe dual du diagramme de Voronoï : la *triangulation de Delaunay* \mathcal{D}_X de l'ensemble X . La triangulation \mathcal{D}_X de X est unique et vérifie que le cercle circonscrit à chacun des triangles ne contient pas d'autre point (ou voisin de Voronoï) en son intérieur. Pour tout point $\mathbf{x} \in X$, ses voisins les plus proches dans $X \setminus \mathbf{x}$ sont les voisins de Voronoï de \mathbf{x} . En d'autres termes, chaque sommet $\mathbf{x} \in X$ dans la triangulation de Delaunay \mathcal{D}_X de X est connecté à ses sommets les plus proches.

Localiser la paire de points les plus proches $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ revient donc à trouver la plus petite arête dans \mathcal{D}_X . C'est cette propriété qui est utilisée dans l'algorithme de décimation, elle permet une implémentation rapide et peu coûteuse en temps de calcul. En effet, il existe de nombreux algorithmes pour localiser rapidement cette arête dans une triangulation de Delaunay. Nous renvoyons aux ouvrages de référence [Preparata et Shamos, 1985] et [Boissonnat et Yvinec, 1998] pour davantage de détails concernant les propriétés mathématiques des triangulations de Delaunay et des diagrammes de Voronoï, ainsi que sur leur implémentation, que nous ne détaillerons pas ici.

7.2.2 Implémentation de l'algorithme de décimation

L'algorithme de décimation est basé sur la triangulation de Delaunay \mathcal{D}_Y et son dual, le diagramme de Voronoï \mathcal{V}_Y , de l'ensemble des points de contrôle à enlever $Y \subseteq X$. Ces deux types de représentation facilitent le calcul du rayon couvrant local $r(\mathbf{y})$, associé à chacune des cellules de Voronoï $\mathcal{V}_Y(\mathbf{y})$ de Y . Le point \mathbf{y}^e , de Y qui minimise $r(\mathbf{y})$ parmi tous les points de Y est supprimé. Comme développé dans [Dyn *et al.*, 2002a] et plus récemment dans [Iske, 2004], le temps de calcul nécessaire à la sélection de \mathbf{y}^e est optimisé en stockant les points de Y et leur rayon couvrant local associé dans un tas binaire. Cette structure de tas permet l'implémentation d'une file de priorité, où les points de Y sont triés selon leur valeur $r(\mathbf{y})$ et enlevés un à un du

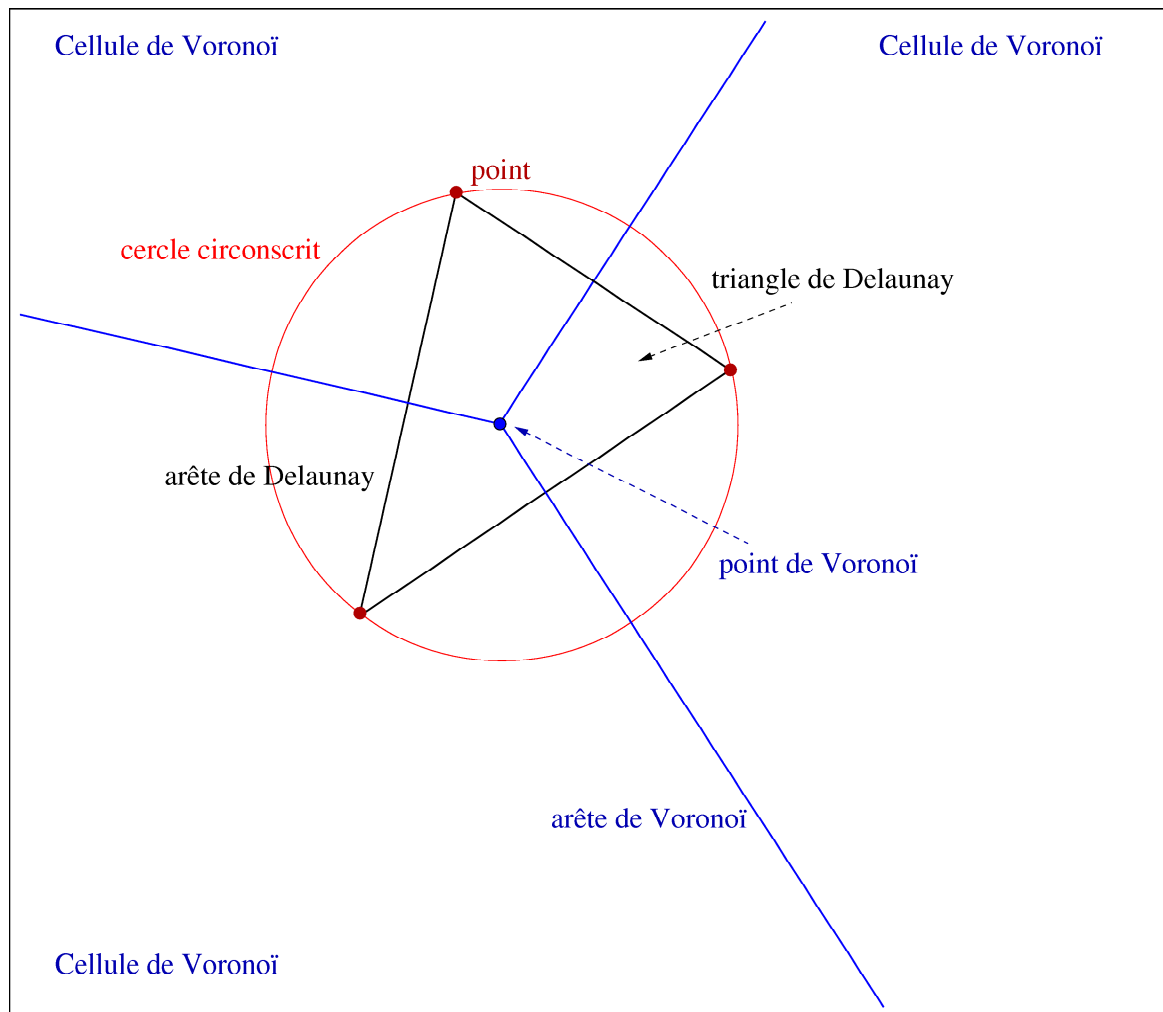


FIG. 7.4 – Géométrie des cellules de Voronoï et des triangles de Delaunay. Les trois points dessinés en rouge sont des voisins de Voronoï.

tas. Le tas est trié de telle manière que la valeur du plus petit rayon couvrant local $r(\mathbf{y}^e)$ soit à la racine. La structure de tas binaire, est un objet tabulé qui peut être vu comme un arbre binaire presque complet. Chaque nœud de l'arbre correspond à un élément du tableau qui contient une valeur de rayon couvrant. Un exemple de tas est illustré par la figure 7.5. Connaissant

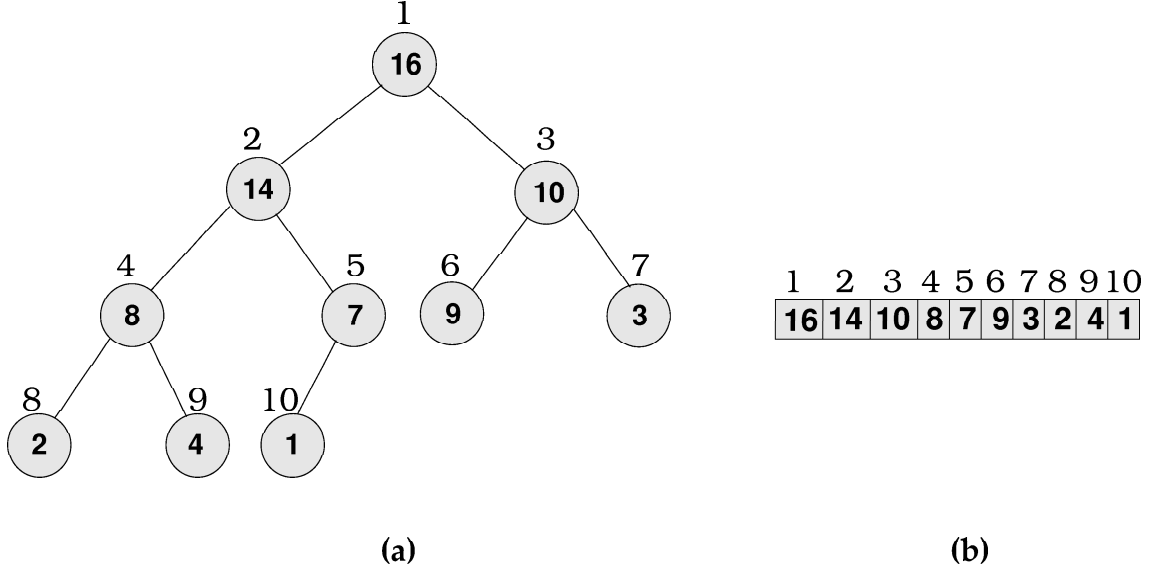


FIG. 7.5 – Un tas binaire peut être vu comme (a) un arbre binaire ; (b) un tableau. Le nombre au dessus d'un nœud est l'indice correspondant dans le tableau. Le nombre à l'intérieur de chaque nœud de l'arbre est la valeur contenue dans le tableau.

l'indice i d'un nœud dans le tas, on peut facilement accéder aux indices de son père, de son fils gauche et de son fils droit. Pour les détails concernant la structure de tas binaire et son implémentation, nous renvoyons à l'ouvrage de Cormen [Cormen *et al.*, 2002]. L'algorithme de décimation est résumé dans le tableau 7.1. Remarquons que les étapes 2-(b) et 2-(c) ne nécessitent que des opérations locales, et pas de recalculer toute la triangulation de Delaunay ni le diagramme de Voronoï [Preparata et Shamos, 1985]. En effet, considérons la cellule de Delaunay $C(\mathbf{x})$ d'un point \mathbf{x} de la triangulation, c'est-à-dire l'union des triangles dont un des points est \mathbf{x} , l'enlèvement du point \mathbf{x} nécessite seulement de supprimer les triangles adjacents dans $C(\mathbf{x})$ puis de retriangler la cellule $C(\mathbf{x})$. Ces deux étapes sont illustrées par la figure 7.6. L'algorithme de décimation ne nécessite que $O(n \log n)$ opérations [Iske, 2004].

7.3 Estimation multi-échelles du mouvement avec algorithme de décimation

Nous présentons un modèle d'estimation multi-échelles du mouvement fluide selon l'ECL et la contrainte de régularité **DR2O**. Ce modèle estime le mouvement à partir d'un ensemble de points de contrôle, sélectionnés sur des critères locaux et un indice de mouvement. L'ensemble des points sélectionnés est décomposé en sous-ensembles emboîtés grâce à l'algorithme de décimation : les sous-ensembles sont de densité décroissante et de répartition spatiale uniforme par rapport à l'ensemble original. A chaque échelle, le modèle estime le mouvement à partir des points de contrôle présents à cette échelle. En ces points, l'ECL est supposée valide et, sur le reste de l'image, les variations en divergence et en vorticité du champ de mouvement sont

1. Calcul géométriques :

- (a) Calcul de la triangulation de Delaunay (et du diagramme de Voronoï) de l'ensemble des points de contrôle ;
- (b) Pour chacune des cellules de Voronoï, calcul du rayon couvrant local (7.5) et insertion de la valeur dans le tas binaire. Les valeurs sont triées par ordre décroissant, si bien que le point de contrôle qui possède le plus petit rayon couvrant local est à la racine du tas ;

2. Décimation des points de contrôle :

- (a) Suppression du point de contrôle correspondant à la valeur de la racine du tas ;
- (b) Mise à jour du tas. Suppression de la racine et triage du tas si nécessaire ;
- (c) Mise à jour de la triangulation de Delaunay et du diagramme de Voronoï.
- (d) Itération de l'algorithme de décimation jusqu'à ce qu'il ne reste que plus que $n - N$ points de contrôle, où n est le nombre de points de contrôle de l'ensemble original et N le nombre de points de contrôle que l'on enlève.

TAB. 7.1 – Étapes de l'algorithme de décimation.

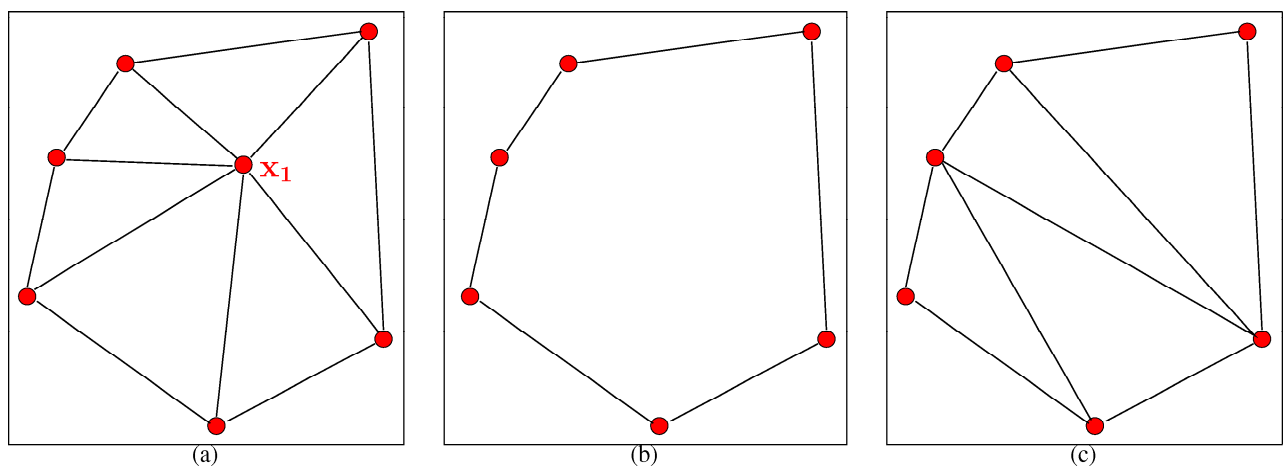


FIG. 7.6 – La suppression d'un point de contrôle de la triangulation de Delaunay ne nécessite que de retriangler la cellule de Delaunay courante. (a) Cellule de Delaunay de x_1 ; (b) Cellule de Delaunay après décimation ; (c) Cellule de Delaunay retriangulée.

minimisées.

7.3.1 Estimation du mouvement à une échelle donnée

Le modèle fait une approximation vectorielle sur le domaine image, et la solution s'exprime comme une somme de fonctions de base, dilatées et translatées de la fonction mère φ_h , et pondérées par des coefficients réels :

$$Qm_h(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{c}_i \mathbf{L}_i \varphi_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i). \quad (7.8)$$

φ_h est une matrice formée des dérivées de la fonction mère :

$$\varphi_h = \begin{pmatrix} \varphi_{h,xx} & \varphi_{h,xy} \\ \varphi_{h,xy} & \varphi_{h,yy} \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

Pour simplifier les notations, les index i de l'équation (7.8) vont de 1 à n , indépendamment de l'échelle et du sous-ensemble de points de contrôle considérés. L'opérateur \mathbf{L} est un opérateur de projection. Il s'applique aux points \mathbf{x}_i :

$$\mathbf{L} = \langle \nabla, \cdot \rangle. \quad (7.10)$$

L'équation (7.8) peut alors s'écrire :

$$Qm_h(\mathbf{w}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i (I_{x_i} \varphi_{h,xx}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + I_{y_i} \varphi_{h,xy}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)) \\ \sum_{i=1}^n c_i (I_{x_i} \varphi_{h,xy}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + I_{y_i} \varphi_{h,yy}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)) \end{cases} \quad (7.11)$$

La fonction mère φ_h du modèle est obtenue en deux étapes : *a*) La discrétisation du système différentiel associé au problème spline (5.38) défini par Amodei [Amodei, 1993; Amodei et Benbourhim, 1994]; *b*) Le produit de la fonction mère, obtenue via cette discrétisation, par une fonction radiale à support compact. L'étape *a*) permet d'obtenir une fonction mère qui vérifie la contrainte **DR2O**. L'étape *b*) permet d'obtenir une fonction mère à support compact, ce qui permet une approche multi-échelles. La matrice des dérivées de la fonction mère du quasi-interpolant défini par Amodei est symétrique et définie positive [Amodei et Benbourhim, 1994] :

$$\begin{pmatrix} \Psi_{h,xx} & \Psi_{h,xy} \\ \Psi_{h,xy} & \Psi_{h,yy} \end{pmatrix}. \quad (7.12)$$

Une propriété des fonctions définies positives est que le produit de fonctions définies positives est défini positif (voir, par exemple [Cristianini et Shawe-Taylor, 2000]). Soit ϕ_1 une **FBR** définie positive et ϕ_2 une **FBR** à support compact et définie positive, alors le produit $\phi = \phi_1 \times \phi_2$ est aussi une **FBR** à support compact définie positive. Ce résultat nous permet de construire la fonction mère de notre modèle :

$$\begin{aligned} \varphi_{h,xx} &= \phi_H \times \Psi_{h,xx} \\ \varphi_{h,xy} &= \phi_H \times \Psi_{h,xy} \\ \varphi_{h,yy} &= \phi_H \times \Psi_{h,yy} \end{aligned} \quad (7.13)$$

7.3. Estimation multi-échelles du mouvement avec algorithme de décimation

où ϕ_H est une **FBR** à support compact, de taille de support H , proportionnel à h . Nous choisissons la fonction ϕ comme étant la fonction fenêtre de Tukey [Harris, 1978], qu'il est facile de transposer au cas 2D par :

$$\phi_H(\|\mathbf{x}\|) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq \|\mathbf{x}\| \leq \tau H, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi (\|\mathbf{x}\| - \tau H)}{(1 - \tau)H} \right) \right) & \text{si } \tau H \leq \|\mathbf{x}\| \leq H, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (7.14)$$

La fonction définie en (7.14) peut être assimilée à une fonction de base radiale de support $2H$. Le paramètre $0 \leq \tau \leq 1$ permet de définir la pente de la fonction, comme illustré sur la figure 7.7. Lorsque $\tau = 1$, la fonction est la fonction «créneau». Lorsque $\tau = 0$, la fonction est la fonction fenêtre de Hann [Harris, 1978]. Le choix de ϕ est justifié par le fait que la fonction $\Psi_{h,xy}$ du quasi-interpolant, vérifiant la contrainte de régularité **DR2O**, est à décroissance moins rapide que celle des fonctions $\Psi_{h,xx}$ et $\Psi_{h,yy}$. Or, si on choisit une **FBR** à support compact quelconque, le produit de $\phi_H \times \Psi_{h,xy}$ risque d'«atténuer» trop fortement la forme de la fonction $\Psi_{h,xy}$ sur le support H . En choisissant la fonction $\phi_H(\|\mathbf{x}\|)$ définie en (7.14) avec un paramètre $\tau \simeq 1$, il est possible de garder la forme de $\phi_H(\|\mathbf{x}\|)$ sur un voisinage $[-H - \epsilon, H + \epsilon]$, $\epsilon > 0$, avec H proche de h , tout en annulant «doucement» $\Psi_{h,xy}$ lorsque $\|\mathbf{x}\| \rightarrow h$. Un exemple de fonction mère du modèle proposé, obtenue par la **FBR** à support compact ϕ_3 avec $\tau = 0.75$, est illustré sur la figure 7.7. En remplaçant \mathbf{x} par \mathbf{x}/H dans (7.14), on fait varier le support de la fonction.

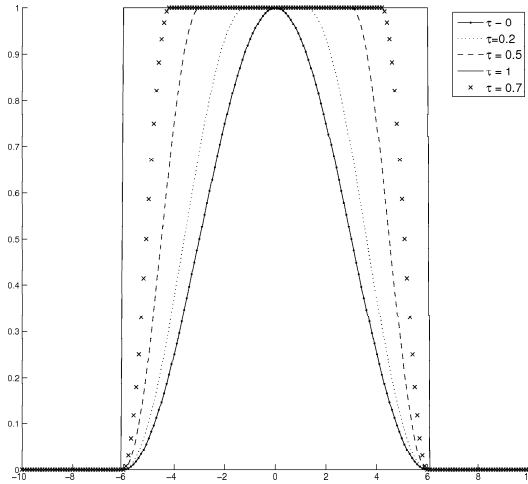


FIG. 7.7 – La fonction «fenêtre de Tukey» pour différentes valeurs de τ .

Les coefficients de la solution sont trouvés en posant les conditions d'interpolation : l'**ECL** est vérifiée sur les points de contrôle. On résout un système qui s'écrit :

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{I}\mathbf{t} \quad (7.15)$$

où $\mathbf{I}\mathbf{t} = (It_1, \dots, It_n)^T$ est le gradient temporel, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$ le vecteur des coefficients de la solution recherchée, et \mathbf{A} est la matrice de taille $n \times n$ correspondant aux fonctions de base du modèle, évaluées aux points de contrôle \mathbf{x}_i , et auxquelles on a appliqué l'opérateur \mathbf{L} par ligne

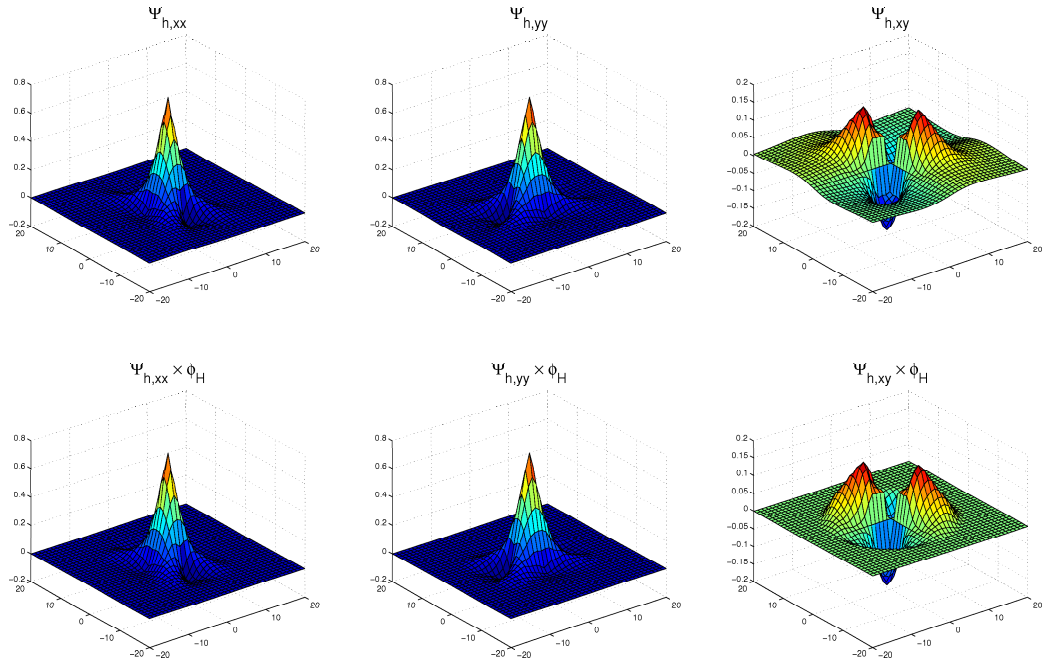


FIG. 7.8 – Représentation de la fonction mère du quasi-interpolant Ψ vérifiant la contrainte de régularité **DR20** et des **FBR** à support compact $\varphi_h = \Psi_h \times \phi_H$ du modèle **AMSV**. Les paramètres sont : $H = 3 \times h$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.9$ et la fonction ϕ est la fonction fenêtre de Tukey définie en (7.14), avec $\tau = 0.75$.

7.3. Estimation multi-échelles du mouvement avec algorithme de décimation

et colonne, soit \mathbf{L}_i et \mathbf{L}_j . Plus précisément, on obtient une matrice de terme général :

$$I_{x_j} I_{x_i} \varphi_{h,xx}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + (I_{x_j} I_{y_i} + I_{y_j} I_{x_i}) \varphi_{h,xy}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + I_{y_j} I_{y_i} \varphi_{h,yy}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j). \quad (7.16)$$

La fonction mère du quasi-interpolant étant à support compact, la matrice \mathbf{A} du système (7.15) est creuse. Son inversion peut se faire rapidement par des méthodes itératives de type gradient conjugué.

7.3.2 Calcul de l'échelle

A une échelle donnée, le choix du support de la fonction mère est difficile : si l'algorithme de décimation permet d'enlever des points de contrôle de manière «uniforme», ceux de l'ensemble original sont très irrégulièrement répartis spatialement, car déterminés par l'information image. De ce fait, si le support est trop petit, l'approximation risque d'être mauvaise et le mouvement sera nul dans les zones de l'image ne contenant pas de points de contrôle. A l'inverse, si la taille du support est trop grande, alors la matrice \mathbf{A} n'est plus creuse et il n'est plus possible de réaliser son inversion rapidement. Comme expliqué par Schaback [Schaback, 1995], Floater et Iske [Floater et Iske, 1996] et dans le chapitre 5 de ce document, il n'est pas possible de choisir une taille de support, qui permette à la fois une qualité d'approximation optimale et une bonne stabilité numérique. Ce constat est appelé «relation d'incertitude» [Schaback, 1995]. En pratique, il est donc nécessaire de faire un compromis entre la qualité d'approximation et la stabilité numérique pour le choix du support des fonctions de base de l'approximant. Comme décrit dans la section 5.4.3 du chapitre 5, la qualité d'approximation dépend de la «distance de remplissage» :

$$h_{X,\Omega} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \min_{\mathbf{x}_i \in X} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|, \quad (7.17)$$

et la stabilité numérique de la «distance de séparation» :

$$q_X = \min_{i \neq j} \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|. \quad (7.18)$$

Les distances (7.17) et (7.18) sont des attributs locaux de l'ensemble X des points de contrôle et du domaine Ω sur lequel on approxime les données. Du point de vue de la qualité d'approximation, la quantité (7.17) devrait être la plus petite possible. Il faut donc que la taille du support vérifie :

$$h \geq \frac{h_{X,\Omega}}{\gamma}, \quad (7.19)$$

pour un paramètre γ de petite valeur, qui dépend de la taille du domaine Ω . Du point de vue de la stabilité numérique, la distance de séparation q_X devrait être la plus petite possible afin que le conditionnement de la matrice \mathbf{A} ne soit pas trop grand. q_X doit donc être majorée par un paramètre fixe δ , suffisamment grand, tel que :

$$h \leq \frac{q_X}{\delta}. \quad (7.20)$$

On obtient ainsi un minorant et un majorant de h :

$$\frac{h_{X,\Omega}}{\gamma} \leq h \leq \frac{q_X}{\delta}. \quad (7.21)$$

Au final, deux stratégies sont possibles : *i*) Privilégier la qualité d'approximation. Dans ce cas on fixe $\gamma > 0$ et on choisit $h = h_{X,\Omega}/\gamma$; *ii*) Privilégier la stabilité numérique. Dans ce

cas on fixe $\delta > 0$ et on choisit $h = q_X/\delta$. Dans cette étude, nous optons pour la stratégie *i*), ce qui nous permet d'obtenir un champ de vecteurs plutôt «lisse», avec un temps de calcul acceptable quand le nombre de points de contrôle est modérément élevé (jusqu'à 30 000 points de contrôle). Remarquons que nous pourrions opter pour une taille de support non constant, mais cette solution nécessiterait la mise en place d'une stratégie permettant d'affecter une taille de support différente à chaque fonction de base. Une telle stratégie peut s'avérer complexe et coûteuse en temps de calcul, surtout si le nombre de fonctions de base est élevé.

7.4 Représentation multi-échelles d'un champ de vecteurs

Il est possible d'utiliser une technique similaire à celle développée dans la section 7.3 pour faire une représentation multi-échelles d'un champ de vecteurs. Nous proposons une méthode permettant de représenter un champ de vecteurs calculé à pleine résolution, selon la contrainte de régularité **DR2O**. Le champ de vecteurs \mathbf{w} , connu, est décomposé suivant plusieurs champs de vecteurs de résolution inférieure. Ces champs sont générés à partir de l'algorithme de décimation, présenté dans la section 7.2, qui génère des sous-ensembles de l'ensemble original des points de contrôle. A ces points de contrôle sont associés, comme observations, les valeurs \mathbf{w}_k du champ pleine résolution. L'approche multi-échelles proposée se base sur l'approche définie par Floater et Iske [Floater et Iske, 1996] et est brièvement présentée dans la section 5.4.3 du chapitre 5. L'algorithme est itératif et à la $i^{\text{ème}}$ itération l'approximant Qm_i correspond au champ \mathbf{w} sur les points de contrôle de l'ensemble X_i :

$$\mathbf{w}|_{X_i} = Qm_i|_{X_i}. \quad (7.22)$$

L'algorithme est défini de manière simplifiée dans le tableau 7.2. Aux basses résolutions, le champ de vecteurs représente le mouvement «grossier», avec un terme d'erreur élevé. Plus la résolution du champ de vecteurs augmente, plus on rajoute de l'information, et plus le support de la fonction mère est petit. A chaque échelle, la taille du support de la fonction mère est choisie selon la distance de remplissage (stratégie *i*) de la section 7.3). L'incrément ΔQm_i , à l'itération i , est calculé en utilisant un quasi-interpolant défini sur une grille irrégulière avec les fonctions de base φ_h (section 7.3), centrées sur les points de contrôle :

$$\Delta Qm(\mathbf{w}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{w}_k \varphi_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k). \quad (7.23)$$

7.5 Limitations du modèle AMSV

Aux vues des expérimentations numériques déjà faites, l'utilisation de fonctions de base issues de la discrétisation du système (5.40) pose deux principales limitations au modèle **AMSV** :

- i) Difficulté d'estimer le mouvement avec l'ECM.* L'estimation du mouvement fluide selon l'ECM repose sur la résolution d'équations partielles différentielles, ce qui nécessite d'appliquer des opérateurs de dérivation à la fonction mère utilisée. Il est difficile d'appliquer de tels opérateurs à une fonction mère qui est elle-même obtenue par des masques discrets à un ordre élevé.
- ii) Coût algorithmique.* Bien que le quasi-interpolant relatif à la contrainte de régularité **DR2O** ait de bonnes propriétés d'approximation, la masse de données à traiter pour certaines applications est telle que la fonction mère à support compact utilisée dans le modèle **AMSV**

– **ENTRÉE :**

- Sous-ensembles de points de contrôle :

$$X_{n-N} \subset \dots \subset X_n = X$$

où N est le nombre de points de contrôle enlevés.

- Vecteurs mouvement $\mathbf{w}|_X$.

– **ALGORITHME :**

1. $Qm_0 = 0$;

2. POUR $i = 1 \dots M$

- Calcule un approximant «résidu» ΔQm_i qui vérifie :

$$(\mathbf{w} - Qm_{i-1})|_{X_i} = \Delta Qm_i|_{X_i},$$

- Calcule un approximant Qm_i :

$$Qm_i = Qm_{i-1} + \Delta Qm_i.$$

– **SORTIE :**

- Séquence d'approximants de \mathbf{w} :

$$Qm_1, \dots, Qm_M$$

TAB. 7.2 – Algorithme de représentation multi-échelles d'un champ de vecteurs.

peut ne pas être adaptée pour calculer rapidement une solution. En effet, la fonction mère du quasi-interpolant défini par Amodei est obtenue par des masques de dérivation discrets à l'ordre 4. Ainsi, l'évaluation de la fonction en un point dépend des 8 points de son voisinage. Ce temps de calcul devient important lorsque le nombre de fonctions de base est élevé. Des techniques numériques existent pour traiter ce problème en approximant les masques [Hyman *et al.*, 1992; Fornberg et Sloan, 1994], mais nous ne les avons pas investiguées.

7.6 Conclusion

Nous avons présenté un modèle d'estimation multi-échelles du mouvement fluide, pour des applications océanographiques. L'approche multi-échelles se base sur une décomposition de l'ensemble original des points de contrôle, à l'aide d'un algorithme itératif de décimation. Les échelles sont liées à la distance de remplissage, qui mesure la «densité spatiale» des points de contrôle. Le modèle proposé estime le mouvement à l'aide de l'**ECL** et utilise une fonction mère permettant un contrôle sur les variations en divergence et en vorticité du champ de mouvement. Nous avons adapté la fonction mère du quasi-interpolant vérifiant la contrainte régularité **DR2O** à une grille irrégulière, et la fonction mère du modèle **AMSV** est ainsi à support compact. Nous avons également proposé une représentation multi-échelles d'un champ de vecteurs calculé à pleine résolution. Cette représentation permet de représenter les basses échelles correspondant au mouvement «grossier», et à des ensembles de points de contrôle peu denses, et les hautes échelles correspondant à davantage de détails, et à des ensembles de points de contrôle denses.

Le modèle **AMSV** est limité à l'**ECL** et basé sur un quasi-interpolant qui utilise des discrétisations à un ordre élevé, ce qui induit un coût numérique lourd si les données sont en nombre important. Ces deux limitations nous incitent à définir un modèle qui traite le cas des fluides compressibles ou incompressibles 3D, et puisse estimer le mouvement à partir d'un très grand nombre de points de contrôle.

Chapitre 8

Modèle d'estimation multi-échelles du mouvement fluide

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé un modèle d'estimation du mouvement fluide dans une approche multi-échelles pour des applications en océanographie. Le modèle utilise une discrétisation d'un système différentiel d'ordre élevé, ce qui pose problème lorsque les images sont de grande taille, et/ou lorsque les points de contrôle sélectionnés pour l'estimation du mouvement sont en nombre important. En outre, ce modèle est limité à l'emploi de l'Equation de Conservation de la Luminance.

Nous présentons donc, dans ce chapitre, un nouveau modèle d'estimation du mouvement des fluides géophysiques : **GFME (Geophysical Fluid Motion Estimation)**. Il permet d'estimer le mouvement sur des images de grande taille et à partir de beaucoup de points de contrôle, avec un coût algorithmique faible. Comme les données utilisées sont généralement bruitées, nous choisissons de formuler le modèle dans un cadre d'approximation. La solution de **GFME** est un champ de vecteurs spline et s'exprime comme une somme de fonctions de base radiales à support compact, pondérées par des coefficients réels, translatées d'une fonction mère sur une grille régulière de pas h . Le support de la fonction mère est ajusté au pas de la grille. Pour un paramètre h , l'estimation du mouvement se fait à une «échelle» donnée, version sous-échantillonnée de l'estimation du mouvement apparent calculé à pleine résolution. Les coefficients de la solution sont trouvés en posant les conditions d'approximation, ce qui revient à chercher le minimum d'une fonctionnelle comprenant un terme quadratique d'attache aux données et un terme de lissage. Pour le cas des fluides incompressibles, comme l'eau, le modèle résout l'**ECL** et la contrainte de régularité **DR2O**. Pour le cas des fluides compressibles, comme les gaz de l'atmosphère, le modèle résout l'**ECM** et la contrainte de régularité **DR2O**. La fonction mère étant à support compact, le système est creux et peut être résolu rapidement par des méthodes itératives.

8.1 Introduction

Les modèles que nous avons présentés, **PUSP** et **AMSV**, ont été conçus pour estimer le mouvement de fluides géophysiques observés par des capteurs satellite. Le modèle **PUSP** repose sur une équation de conservation (**ECL** ou **ECM** selon l'application considérée), vérifiée en des points de contrôle, et la contrainte de régularité **DR2O**. Ce modèle est inadapté à l'estimation multi-échelles du mouvement, car il utilise une fonction mère à support infini. D'où l'idée d'employer une fonction mère à décroissance rapide pour une bonne estimation du mouvement fluide, composé de tourbillons de tailles variées. **AMSV** est conçu à partir de cette idée :

il adapte la technique de quasi-interpolation suivant la contrainte **DR2O** pour l'estimation du mouvement. Cependant, **AMSV** utilise une fonction mère qui fait intervenir des dérivées discrètes d'ordre élevé, ce qui entraîne des limitations : difficulté d'estimer le mouvement selon l'**ECM** et coût algorithmique important lorsque les données à approximer sont nombreuses. Pour ces raisons, nous présentons un nouveau modèle d'estimation multi-échelles du mouvement fluide : **GFME**.

Nous décidons, pour **GFME**, d'opter pour une fonction mère à support compact [Wendland, 1995; Buhmann, 2001], et de chercher le minimum de l'énergie associée à la contrainte de régularité **DR2O** et à l'équation de conservation pour les fonctions de base obtenues par dilatation et translation de la fonction mère. Le problème, que nous résolvons, n'est donc plus le minimum exact de la contrainte de régularité **DR2O**. La qualité d'approximation de la fonction mère à support compact n'est pas aussi bonne que celle des fonctions «globales», comme par exemple les splines «plaque-mince», mais il est possible de compenser cette limitation avec des approches multi-échelles, comme décrit dans le chapitre 5. Cependant, l'emploi d'une fonction mère à support compact a des avantages : rapidité du calcul de la solution, implémentation numérique simple, degré de continuité arbitraire. Par ailleurs, la fonction mère à support compact est utilisée dans beaucoup d'applications nécessitant un calcul rapide de la solution, avec des ajouts fréquents d'information sans avoir à réévaluer toute la spline : modèles numériques de terrain, rendu de visage 3D, ...

La solution du modèle **GFME** s'écrit comme une somme de fonctions de base, pondérées par des coefficients réels qui sont calculés par résolution d'un système linéaire. Les fonctions de base de l'approximant sont obtenues par translation d'une fonction mère, sur une grille régulière de pas h qui définit l'échelle à laquelle on souhaite estimer le mouvement. Le support de la fonction mère varie en fonction de h : aux basses échelles, c'est-à-dire pour h grand, le mouvement estimé est «grossier» et pour h petit, le modèle estime des mouvements à l'échelle locale. Les coefficients de la solution sont trouvés en posant les conditions d'approximation. Le modèle résout un système d'équations linéaires (sur-déterminé) aux points de la grille. Ce système correspond à la discrétisation du minimum d'une fonctionnelle comprenant deux termes : un terme de régularité et un terme quadratique d'attache aux données. Dans le cas des fluides incompressibles, le terme d'attache correspond à l'**ECL**, et dans le cas des fluides compressibles il correspond à l'**ECM**. Le second terme est la contrainte de régularité **DR2O**, qui semble la mieux adaptée pour l'estimation du mouvement fluide. Un paramètre de pondération permet de donner plus ou moins d'influence à l'un des deux termes.

Du fait de la fonction mère utilisée, à support compact, le système est creux et son inversion peut se faire par des méthodes itératives de type gradient conjugué. Afin d'améliorer la convergence de l'algorithme et le conditionnement de la matrice à inverser, nous utilisons un préconditionnement de Jacobi.

Enfin, nous employons une approche multi-résolutions, classiquement utilisée dans les modèles d'estimation du mouvement. Le champ de vitesse «grossier» est d'abord estimé à basse échelle, la séquence d'image filtrée par un filtre passe-bas et sous-échantillonnée. Puis, des incréments de mouvement sont estimés aux échelles de plus haute résolution. Le mouvement total est la somme du champ grossier et des incréments de mouvement.

8.2 Modèle GFME

Nous cherchons une solution $\mathbf{w} = (u, v)^T$ sous la forme d'un champ de vecteurs spline sur le domaine image Ω . Cette solution s'exprime comme une somme de fonctions de base, de

8.3. Calcul des cEfficients de la solution

support γ proportionnel à h , translatées d'une fonction mère ϕ sur une grille régulière de pas h , et pondérées par des coefficients réels \mathbf{c} . Autrement dit :

$$\begin{cases} u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2 \cap \Omega} c_i^u \phi\left(\left\|\frac{\mathbf{x} - h\mathbf{v}}{\gamma}\right\|\right) \\ v(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2 \cap \Omega} c_i^v \phi\left(\left\|\frac{\mathbf{x} - h\mathbf{v}}{\gamma}\right\|\right) \end{cases} \quad (8.1)$$

La fonction mère ϕ est radiale à support compact [Wu, 1995; Wendland, 1995; Buhmann, 2001]. Notons que le degré de continuité de la fonction mère doit être suffisamment élevé pour la discrétisation employée dans le calcul des coefficients (voir section suivante). La taille du support γ de la fonction mère dépend du pas de la grille, de telle manière que les supports se «recouvrent» sur le domaine image. De manière générale $\gamma > h$: plus γ est proche de h et plus le temps de calcul diminue, mais moins le champ estimé est «lisse». A l'inverse, si $\gamma \gg h$ le champ est plus lisse, mais le temps de calcul de la solution plus long. Dans les expérimentations, nous choisissons $\gamma = 3 \times h$ ce qui semble être un bon compromis. Les paramètres réels $\mathbf{c} = (c_1^u, \dots, c_m^u, c_1^v, \dots, c_m^v)^T = (\mathbf{c}^u, \mathbf{c}^v)^T$, où m est le nombre de points de la grille, sont trouvés en posant les conditions d'approximation, que nous détaillons dans la section suivante.

8.3 Calcul des coefficients de la solution

Les paramètres du modèle **GFME** sont les coefficients réels $\mathbf{c} = (c_1^u, \dots, c_m^u, c_1^v, \dots, c_m^v)^T$, trouvés par la résolution d'un système linéaire. Ce système pose les conditions d'approximation aux points de la grille. Nous allons maintenant détailler ce système, qui se base soit sur l'**ECL** et la contrainte de régularité **DR2O** dans le cas des fluides incompressibles, soit sur l'**ECM** et la contrainte de régularité **DR2O** dans le cas des fluides compressibles.

8.3.1 Cas des fluides incompressibles 2D

Nous cherchons une solution spline \mathbf{w} , qui soit le minimum de la fonctionnelle :

$$P_{\text{GFME-I}}(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n (\nabla I \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}_i) + It(\mathbf{x}_i))^2 + \lambda \int_{\Omega} \alpha \|\nabla \text{div } \mathbf{w}\|^2 + \beta \|\nabla \text{rot } \mathbf{w}\|^2 dx dy, \quad (8.2)$$

où les \mathbf{x}_i , $i = 1 \dots n$, sont les points de contrôle sélectionnés. Notre but est d'exprimer cette fonctionnelle dépendant de \mathbf{w} comme une fonctionnelle des coefficients \mathbf{c} . Pour ce faire, on exprime le vecteur mouvement comme une combinaison linéaire de fonctions de base, soit, par exemple, pour le vecteur \mathbf{w}_1 au point de contrôle \mathbf{x}_1 :

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi\left(\frac{x_1 - k_1}{\gamma}, \frac{y_1 - l_1}{\gamma}\right) c_1^u + \dots + \phi\left(\frac{x_1 - k_m}{\gamma}, \frac{y_1 - l_m}{\gamma}\right) c_m^u \\ \phi\left(\frac{x_1 - k_1}{\gamma}, \frac{y_1 - l_1}{\gamma}\right) c_1^v + \dots + \phi\left(\frac{x_1 - k_m}{\gamma}, \frac{y_1 - l_m}{\gamma}\right) c_m^v \end{pmatrix}. \quad (8.3)$$

En écrivant les équations pour tous les points de contrôle, on obtient le système sur-déterminé suivant :

$$\begin{pmatrix} \phi\left(\frac{x_1 - k_1}{\gamma}, \frac{y_1 - l_1}{\gamma}\right) & \dots & \phi\left(\frac{x_1 - k_m}{\gamma}, \frac{y_1 - l_m}{\gamma}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi\left(\frac{x_n - k_1}{\gamma}, \frac{y_n - l_1}{\gamma}\right) & \dots & \phi\left(\frac{x_n - k_m}{\gamma}, \frac{y_n - l_m}{\gamma}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^u \\ \vdots \\ c_m^u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Phi \mathbf{c}^u = \mathbf{u} \quad (8.4)$$

et :

$$\begin{pmatrix} \phi\left(\frac{x_1 - k_1}{\gamma}, \frac{y_1 - l_1}{\gamma}\right) & \dots & \phi\left(\frac{x_1 - k_m}{\gamma}, \frac{y_1 - l_m}{\gamma}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi\left(\frac{x_n - k_1}{\gamma}, \frac{y_n - l_1}{\gamma}\right) & \dots & \phi\left(\frac{x_n - k_m}{\gamma}, \frac{y_n - l_m}{\gamma}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^v \\ \vdots \\ c_m^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Phi \mathbf{c}^v = \mathbf{v}. \quad (8.5)$$

La matrice Φ est de taille $n \times m$. Les fonctions de base ϕ sont centrées sur les points d'une grille régulière de pas h . Le premier terme de la fonctionnelle (8.2) peut alors s'exprimer en fonction des coefficients \mathbf{c} . Sous forme matricielle, nous avons :

$$\|\mathbf{G}\Phi_g \mathbf{c} + \mathbf{It}\|^2, \quad (8.6)$$

où $\mathbf{c} = (\mathbf{c}^u, \mathbf{c}^v)^T$ et :

$$\Phi_g = \begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Phi \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

Les vecteurs $\mathbf{It} = (It(\mathbf{x}_1), \dots, It(\mathbf{x}_n))^T$ et $\mathbf{G} = (\mathbf{I}_x \quad \mathbf{I}_y)^T$ correspondent respectivement aux gradients temporel et spatial évalués sur les points de contrôles \mathbf{x}_i . Les matrices \mathbf{I}_x et \mathbf{I}_y , de taille $n \times n$, sont diagonales :

$$\mathbf{I}_x = \begin{pmatrix} I_x(\mathbf{x}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_x(\mathbf{x}_2) & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_x(\mathbf{x}_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_y = \begin{pmatrix} I_y(\mathbf{x}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_y(\mathbf{x}_2) & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_y(\mathbf{x}_n) \end{pmatrix}. \quad (8.8)$$

Nous exprimons maintenant la contrainte de régularité **DR2O**, second terme de la fonctionnelle (8.2), en fonction des coefficients \mathbf{c} . Nous adoptons la discrétisation proposée par Amodei [Amodei et Benbourhim, 1994] pour la définition d'un quasi-interpolant vérifiant la contrainte de régularité **DR2O**. On définit l'orthogonal de l'opérateur gradient :

$$\nabla^\perp = (-\partial_y, \partial_x)^T.$$

Les opérateurs ∇ et ∇^\perp sont orthogonaux dans V^1 , espace de Beppo-Levi d'ordre 1 (voir [Amodei, 1991; Amodei, 1993]) :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla \zeta, \nabla^\perp \varphi \rangle dx dy = 0, \quad \forall \zeta, \varphi \in V^1. \quad (8.9)$$

8.3. Calcul des cEfficients de la solution

Pour tout $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathcal{V}^2$, on a $\text{div } \mathbf{w}_1 \in V^1$ et $\text{rot } \mathbf{w}_2 \in V^1$. En d'autres termes :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla \text{div } \mathbf{w}_1, \nabla^\perp \text{rot } \mathbf{w}_2 \rangle dx dy = 0. \quad (8.10)$$

En remarquant que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla \text{rot } \mathbf{w}\|^2 dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla^\perp \text{rot } \mathbf{w}\|^2 dx dy, \quad (8.11)$$

et que :

$$\|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|^2 = \|\mathbf{w}_1\|^2 + \|\mathbf{w}_2\|^2 - 2 \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle, \quad (8.12)$$

on a :

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla \text{div } \mathbf{w}\|^2 + \beta \int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla \text{rot } \mathbf{w}\|^2 dx dy &= \int_{\mathbb{R}^2} \|\sqrt{\alpha} \nabla \text{div } \mathbf{w} - \sqrt{\beta} \nabla^\perp \text{rot } \mathbf{w}\|^2 dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \|Q(D)\mathbf{w}\|^2 dx dy. \end{aligned} \quad (8.13)$$

$Q(D)$ dépend d'opérateurs différentiels et est définie par :

$$Q(D) = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} \partial_{xx} + \sqrt{\beta} \partial_{yy} & (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}) \partial_{xy} \\ (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}) \partial_{xy} & \sqrt{\alpha} \partial_{yy} + \sqrt{\beta} \partial_{xx} \end{pmatrix}. \quad (8.14)$$

En utilisant le fait que $\Phi \mathbf{c}^u = \mathbf{u}$ et $\Phi \mathbf{c}^v = \mathbf{v}$, nous pouvons écrire :

$$P_{\text{GFME-I}}(\mathbf{c}) = \|\mathbf{G}\Phi_g \mathbf{c} + \mathbf{It}\|^2 + \lambda \|\bar{\mathbf{R}}\mathbf{c}\|^2, \quad (8.15)$$

où la matrice $\bar{\mathbf{R}}$, de taille $2n \times 2m$, est une discrétisation de :

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} \partial_{xx} \Phi + \sqrt{\beta} \partial_{yy} \Phi & (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}) \partial_{xy} \Phi \\ (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}) \partial_{xy} \Phi & \sqrt{\alpha} \partial_{yy} + \sqrt{\beta} \partial_{xx} \Phi \end{pmatrix}. \quad (8.16)$$

Nous utilisons des masques de différences finies pour la discrétisation, obtenus par itération de l'opérateur de différences finies centré :

$$\overline{\partial_{x,y}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta & -\delta \\ +\frac{1}{2}e_{x,y} & -\frac{1}{2}e_{x,y} \end{pmatrix}, \quad (8.17)$$

où $e_x = (1, 0)^T$ et $e_y = (0, 1)^T$. Par exemple :

$$\partial_{xx} \phi(\cdot, \cdot) \simeq \frac{1}{4} (\phi(\cdot + 1, \cdot) - 2\phi(\cdot, \cdot) + \phi(\cdot - 1, \cdot)). \quad (8.18)$$

Remarquons que l'utilisation de masques discrets, pour le calcul des dérivées, nous permet de ne pas avoir à calculer les dérivées de manière explicite pour la fonction mère utilisée. Ainsi, le modèle est indépendant du choix de la fonction mère ϕ employée pour l'expression de la contrainte de régularité **DR2O**, sous l'hypothèse que ϕ ait un degré de continuité suffisant pour permettre une discrétisation à l'ordre deux. La fonctionnelle $P_{\text{GFME-I}}$ peut donc s'exprimer en fonction de \mathbf{c} :

$$\begin{aligned} P_{\text{GFME-I}}(\mathbf{c}) &= \|\mathbf{G}\Phi_g \mathbf{c} + \mathbf{It}\|^2 + \lambda \|\bar{\mathbf{R}}\mathbf{c}\|^2 \\ &= \|\mathbf{A}\mathbf{c} - \mathbf{b}\|^2 + \lambda \|\bar{\mathbf{R}}\mathbf{c}\|^2, \end{aligned} \quad (8.19)$$

où l'on note $\mathbf{A} = \mathbf{G}\Phi_g$ et $\mathbf{b} = -\mathbf{I}t$ pour simplifier les notations. En développant :

$$P_{\text{GFME-I}}(\mathbf{c}) = (\mathbf{A}\mathbf{c} - \mathbf{b})^T(\mathbf{A}\mathbf{c} - \mathbf{b}) + \lambda \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}} \mathbf{c}. \quad (8.20)$$

En posant $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ et $\tilde{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}}$, qui sont des matrices symétriques définies positives de taille $2m \times 2m$, nous obtenons :

$$P_{\text{GFME-I}}(\mathbf{c}) = \mathbf{c}^T (\tilde{\mathbf{A}} + \lambda \tilde{\mathbf{R}}) \mathbf{c} - 2\mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{b}. \quad (8.21)$$

Nous cherchons le minimum de cette fonctionnelle. Celui-ci est atteint lorsque :

$$\frac{\partial P_{\text{GFME-I}}(\mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}} = 0. \quad (8.22)$$

En utilisant les formules de dérivées matricielles, nous trouvons :

$$\frac{\partial P_{\text{GFME-I}}(\mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}} = 2\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{c} - 2\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{b} + \lambda 2\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{c}. \quad (8.23)$$

Soit :

$$\frac{\partial P_{\text{GFME-I}}(\mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}} = 0 \Leftrightarrow (\tilde{\mathbf{A}} + \lambda \tilde{\mathbf{R}}) \mathbf{c} = \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{b}. \quad (8.24)$$

Les coefficients \mathbf{c} de la solution sont donc fournis par :

$$\mathbf{c} = (\tilde{\mathbf{A}} + \lambda \tilde{\mathbf{R}})^{-1} \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{b}. \quad (8.25)$$

Le calcul de \mathbf{c} est rapide car la matrice $(\tilde{\mathbf{A}} + \lambda \tilde{\mathbf{R}})$ est bande (conséquence du choix d'une fonction mère à support compact).

8.3.2 Cas des fluides compressibles ou incompressibles 3D

Dans le cas des fluides compressibles ou incompressibles 3D, le mouvement peut avoir une divergence non nulle dans le plan image. Nous cherchons une solution spline \mathbf{w} , minimum d'une fonctionnelle d'énergie utilisant la contrainte de régularité **DR2O** et l'**ECM** :

$$P_{\text{GFME-II}}(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n (\nabla I \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}_i) + I(\mathbf{x}_i) \operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x}_i) + It(\mathbf{x}_i))^2 + \lambda \int_{\Omega} \alpha \|\nabla \operatorname{div} \mathbf{w}\|^2 + \beta \|\nabla \operatorname{rot} \mathbf{w}\|^2 dx dy. \quad (8.26)$$

Comme dans le cas des fluides incompressibles, nous cherchons à exprimer cette énergie en fonction des coefficients \mathbf{c} . Aussi, nous posons :

$$\mathbf{w} = (u, v)^T = (\Phi \mathbf{c}^u, \Phi \mathbf{c}^v)^T. \quad (8.27)$$

Le second terme de la fonctionnelle (8.26) peut s'exprimer, avec les mêmes notations que dans la section **8.3.1**, par :

$$\lambda \mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{c}. \quad (8.28)$$

8.4. Résolution numérique du système

Le premier terme de la fonctionnelle s'écrit :

$$\|\mathbf{G}\Phi_g \mathbf{c} + \mathbf{ID}(\Phi_g \mathbf{c}) + \mathbf{It}\|^2, \quad (8.29)$$

où :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I(\mathbf{x}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I(\mathbf{x}_2) & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I(\mathbf{x}_n) \end{pmatrix} \quad (8.30)$$

et :

$$\mathbf{D}(\Phi_g \mathbf{c}) = \mathbf{D}(\Phi_g) \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \partial_x \Phi & 0 \\ 0 & \partial_y \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^u \\ \mathbf{c}^v \end{pmatrix}, \quad (8.31)$$

en supposant les coefficients \mathbf{c} constants. Nous discrétisons l'opérateur \mathbf{D} et nous utilisons des masques de différences finies au premier ordre, comme pour la contrainte **DR2O**. On note $\bar{\mathbf{D}}$ la discrétisation de cette matrice, avec $\bar{\partial}_{x,y}$ les masques de différences finies centrés définis en (8.17). On a :

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \bar{\partial}_x & 0 \\ 0 & \bar{\partial}_y \end{pmatrix}. \quad (8.32)$$

Finalement, nous obtenons :

$$\|(\mathbf{G}\Phi_g + \bar{\mathbf{ID}}\Phi_g) \mathbf{c} + \mathbf{It}\|^2. \quad (8.33)$$

On remarque que l'on aboutit au même système qu'en (8.24), avec A une matrice de taille $n \times 2m$:

$$A = (\mathbf{G}\phi_g + \bar{\mathbf{ID}}\Phi_g). \quad (8.34)$$

Comme dans le cas des fluides incompressibles, le calcul des coefficients \mathbf{c} de la solution est rapide car la matrice A est creuse.

8.4 Résolution numérique du système

En posant $\mathbf{B} = (\tilde{A} + \lambda \tilde{R})$ et $\mathbf{d} = \tilde{A}^T b$, la partie droite de (8.24) est un système linéaire sur-déterminé du type :

$$\mathbf{Bc} = \mathbf{d}. \quad (8.35)$$

La taille de la matrice \mathbf{B} , $2m \times 2m$, dépend du pas h de la grille régulière : plus h est petit, plus la matrice \mathbf{B} est grande, et inversement. La fonction mère ϕ étant à support compact, la matrice \mathbf{B} est creuse. L'inversion de cette dernière peut se faire en utilisant des méthodes d'algèbre linéaire dédiées, tel que l'algorithme du gradient conjugué. Cet algorithme estime itérativement la solution du système (8.35) en minimisant la fonction :

$$f(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{Bc} - \mathbf{c}^T \mathbf{d}, \quad (8.36)$$

c'est-à-dire en annulant son gradient. Soit :

$$\nabla f = \mathbf{Bc} - \mathbf{d} = 0. \quad (8.37)$$

Cette équation peut se réécrire :

$$\mathbf{Bc} = \mathbf{d}, \quad (8.38)$$

qui est l'équation (8.35).

8.4.1 Amélioration de la convergence

Du point de vue théorique, on peut montrer que le nombre d'itérations nécessaire à la résolution de (8.35), avec l'algorithme du gradient conjugué, dépend du conditionnement spectral de \mathbf{B} :

$$\chi(\mathbf{B}) = \frac{\max_{1 \leq j \leq 2m} |\sigma_j|}{\min_{1 \leq j \leq 2m} |\sigma_j|}, \quad (8.39)$$

les réels σ_j , $1 \leq j \leq 2m$, étant les valeurs propres de \mathbf{B} . La quantité $\chi(\mathbf{B})$ doit être la plus petite possible pour que la résolution du problème (8.35) soit numériquement stable. En pratique, au lieu de résoudre $\mathbf{Bc} = \mathbf{d}$ avec l'algorithme du gradient conjugué, le modèle résout :

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Bc} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{d}, \quad (8.40)$$

où \mathbf{P} est une matrice symétrique définie positive, choisie de sorte que :

- $\chi(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B})$ soit nettement plus petit que $\chi(\mathbf{B})$;
- La résolution d'un système linéaire du type $\mathbf{Py} = \mathbf{g}$ est nettement moins coûteuse en temps de calcul que celle du système $\mathbf{Bc} = \mathbf{d}$.

Nous utilisons un préconditionnement de Jacobi. Cette technique a déjà été utilisée avec succès pour les méthodes d'interpolation ou d'approximation [Fasshauer, 1999]. Au lieu de résoudre directement :

$$\mathbf{Bc} = \mathbf{d}, \quad (8.41)$$

nous réécrivons le système (8.41) sous la forme :

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP}^{-1}\mathbf{Pc} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{d}. \quad (8.42)$$

Le système préconditionné (8.42) est résolu en deux temps :

$$\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{d} \quad (8.43)$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{y}, \quad (8.44)$$

où $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP}$ et $\mathbf{P} = \sqrt{\text{diag}(\mathbf{B})}$.

Cette méthode permet d'accélérer la convergence de l'algorithme et de réduire grandement le conditionnement de la matrice à inverser, notamment lorsque la taille du support de la fonction mère est petite.

8.5 Estimation multi-échelles du mouvement

Afin que le modèle puisse estimer le mouvement à différentes échelles, nous optons pour une approche incrémentale largement utilisée [Black et Anandan, 1991; Black, 1992; Weber et Malik, 1995; Bernard, 1999; Corpetti *et al.*, 2002].

L'algorithme consiste à combiner les estimations du mouvement faites à différentes résolutions spatiales des images. On note I_0 et I_1 les deux images à partir desquelles on estime le mouvement. On considère deux pyramides gaussiennes, comme illustré sur la figure 8.1, et on note I_0^i et I_1^i les images au niveau i de la pyramide. On commence par estimer le mouvement

8.5. Estimation multi-échelles du mouvement

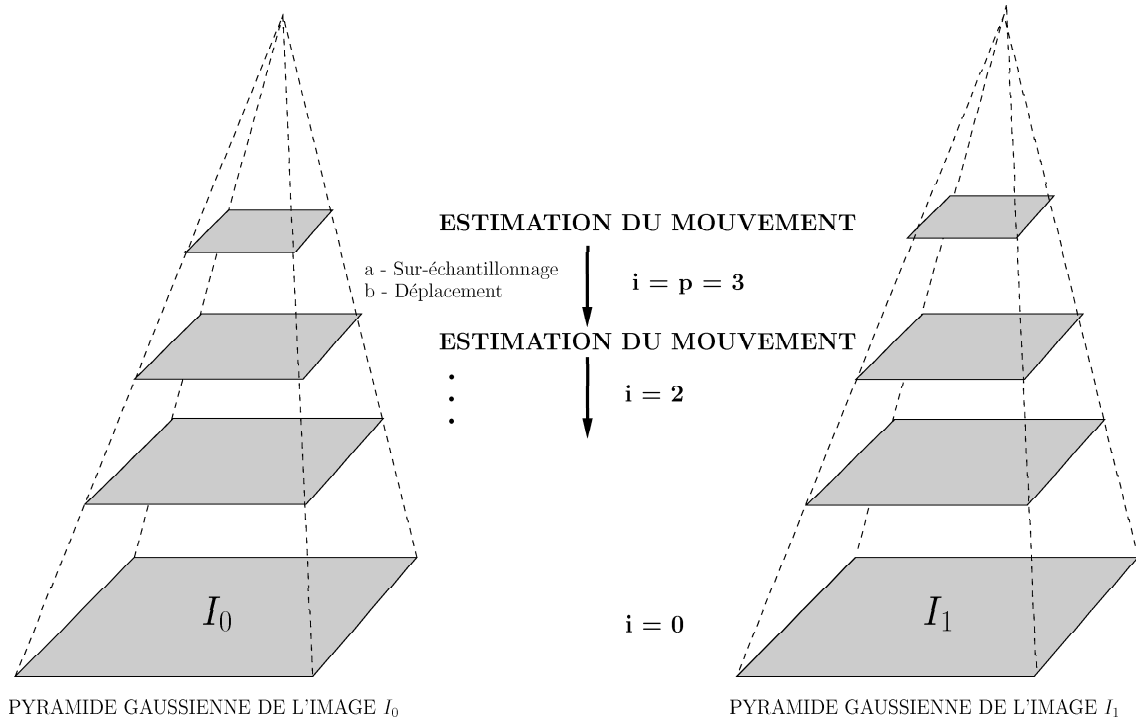


FIG. 8.1 – Principe du schéma incrémental d'estimation du mouvement suivant une pyramide gaussienne.

«grossier» w_p au niveau le plus haut de la pyramide (son sommet), entre les images I_0^p et I_1^p . Pour passer du niveau de résolution i à $i - 1$: (1) on sur-échantillonne d'un facteur 2 le champ w_i , puis (2) on compense I_0^{i-1} de ce champ, pour créer \tilde{I}_0^{i-1} , et (3) on calcule enfin le mouvement entre \tilde{I}_0^{i-1} et I_1^{i-1} , en utilisant les mêmes points de contrôle. Ce processus est répété jusqu'à atteindre le niveau $i = 0$, de résolution maximale. Au final, le champ de mouvement w s'exprime comme une somme du champ grossier et de p incréments :

$$w = w_p + \sum_{i=p-1}^0 \tilde{w}_i. \quad (8.45)$$

Dans le modèle **GFME**, nous choisissons de garder un pas de grille h constant à toutes les différentes échelles. Les opérations effectuées par l'algorithme sont synthétisées dans le tableau 8.1. La figure 8.2 illustre le déroulement de l'algorithme pour 2 itérations.

- POUR $i = p \dots 0$, FAIRE :
 - SI $i = p$ FAIRE :
 - Estime le mouvement pour obtenir \mathbf{w}_i ;
 - SINON, FAIRE :
 - Sur-échantillonne le champ \mathbf{w}_{i-1} pour créer le champ \mathbf{w}_i^* à la résolution i ;
 - Multiplie \mathbf{w}_i^* par deux ;
 - Calcule l'image compensée $\tilde{\mathbf{I}}_0$ de \mathbf{w}_i^* ;
 - Estime le mouvement pour obtenir $\tilde{\mathbf{w}}_i$;
 - Applique l'incrément $\tilde{\mathbf{w}}_i$ pour obtenir le champ de mouvement \mathbf{w}_i , soit :

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i^* + \tilde{\mathbf{w}}_i.$$

TAB. 8.1 – Algorithme itératif multi-échelles par pyramide gaussienne.

8.6 Conclusion

Nous avons défini un nouveau modèle d'estimation du mouvement : **GFME**. Ce modèle estime le mouvement des fluides géophysiques incompressible ou compressible, sur des images de grande taille et à partir de beaucoup de points de contrôle. La fonction mère utilisée dans le modèle **GFME** est radiale, à support compact, et translatée sur une grille régulière de pas h qui définit la résolution à laquelle est calculé le mouvement. Le modèle permet donc une estimation multi-échelles, et appréhende le comportement turbulent des fluides observées. Les différentes échelles sont reliées au moyen d'une structure pyramidale.

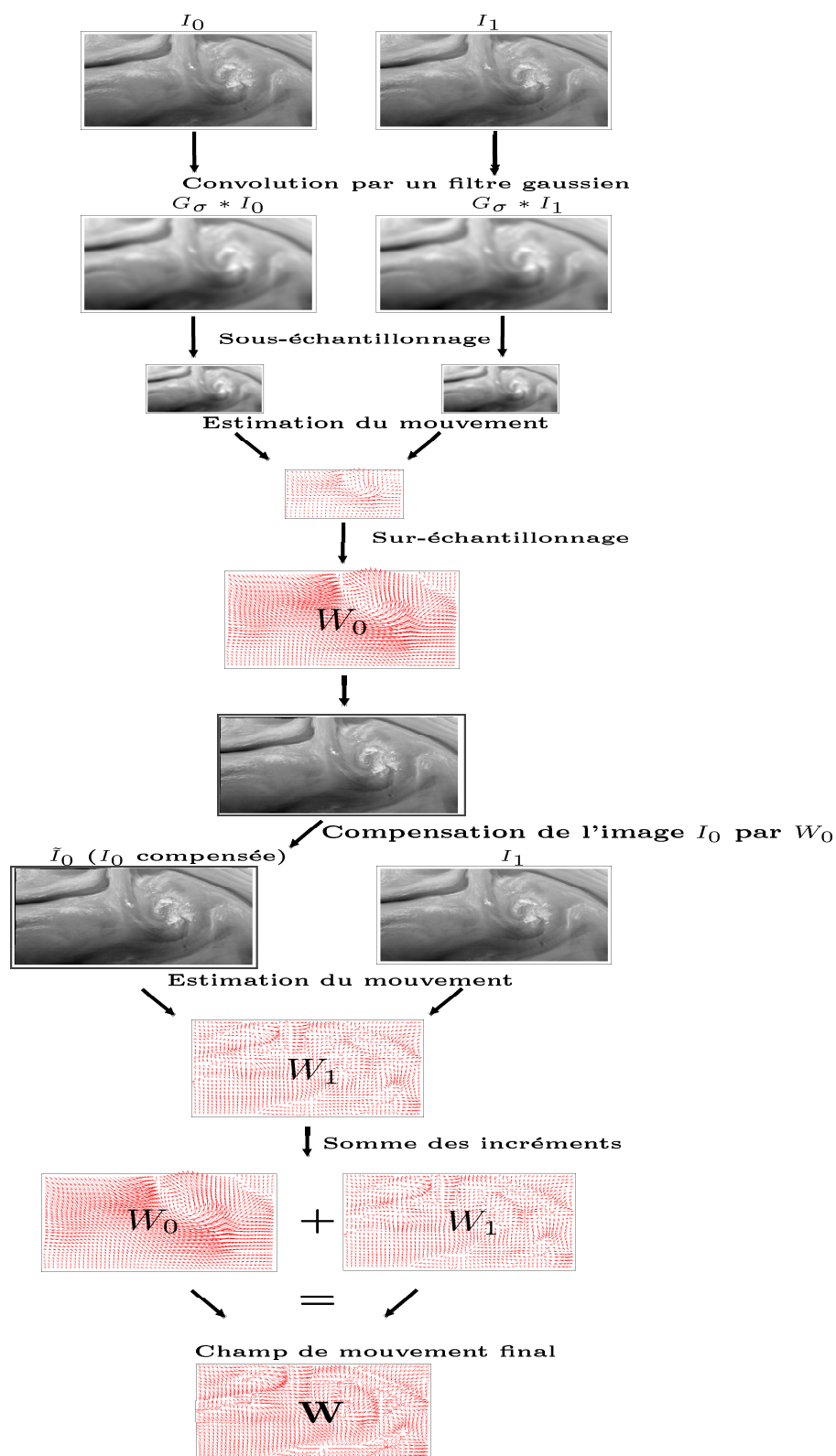


FIG. 8.2 – Schéma incrémental d'estimation du mouvement sur deux niveaux. A chaque échelle de résolution le mouvement est estimé, puis sur-échantillonné. L'image I_0 de résolution supérieure est «compensée» de ce champ et une nouvelle estimation du mouvement est faite à cette résolution entre \tilde{I}_0 (l'image I_0 compensée), et l'image I_1 .

Chapitre 9

Validation et analyse des résultats

Dans les chapitres précédents, trois modèles d'estimation du mouvement fluide ont été définis. Ce chapitre présente donc les résultats obtenus par ces modèles. Les données, sur lesquelles nous avons travaillées, sont de deux types : *i*) des données synthétiques simulées par un modèle de circulation océanographique ; *ii*) des séquences d'images satellite météorologiques. Le chapitre est découpé en deux parties : nous faisons d'abord une analyse quantitative des résultats sur les données simulées, puis une analyse qualitative sur les données réelles.

9.1 Estimation du mouvement sur des données synthétiques

Nous avons exploité les données obtenues en effectuant des simulations au moyen d'un modèle de circulation océanographique. Ce travail permet d'effectuer une validation numérique des champs de mouvement obtenus par les modèles.

9.1.1 Présentation du modèle de circulation océanographique OPA

Le modèle **OPA** (**O**cean **P**arallelise) [Madec *et al.*, 1999] est développé par le laboratoire **LOCEAN** (**L**aboratoire d'**O**céanographie et du **c**limat) de l'université Pierre et Marie Curie. **OPA** permet de modéliser la circulation générale de l'océan et est composé d'un ensemble de modules : un code dynamique de la circulation océanique, un code de transport de traceurs passifs, ainsi qu'une série de modules biogéochimiques. Il comprend également des interfaces de couplage avec d'autres modèles, pour simuler les interactions avec les diverses composantes du système climatique terrestre (atmosphère, terre, végétation, glace de mer). Le noyau **OPA** est un modèle aux équations primitives, appliqué aux niveaux régional et global de la circulation océanographique. **OPA** est utilisé en océanographie, météorologie, climatologie, paléoclimatologie. Les variables d'état sont la vitesse tridimensionnelle $\mathbf{V} = (u, v, w)^T$ à différentes hauteurs verticales, la température et la salinité de l'eau. La concentration en chlorophylle peut aussi être obtenue en couplant **OPA** avec le modèle d'évolution biologique **LOBSTER** [Flynn, 2001]. Les données d'entrée sont les conditions initiales des variables d'état et les conditions aux bords (interaction avec la surface, force du vent, friction, forçage radiatif).

9.1.2 Données exploitées

Le laboratoire **LOCEAN** a fourni deux séquences de données simulées par **OPA**, couplé à **LOBSTER**. La zone d'intérêt couvre le Nord-Est de l'océan Atlantique, avec une résolution

spatiale de 0.05° et une résolution temporelle de 24 heures, sur une durée de trois mois. Cette simulation correspond à la période du «*bloom*» de printemps : la période de l'année la plus riche en événements, en terme de variations de température entre les différentes couches de l'océan et d'activité photosynthétique du plancton. La calibration a été réalisée à partir d'observations issues de la campagne d'acquisition **POMME (Programme Océan Multidisciplinaire Mésos-Echelle)** [Levy *et al.*, 2004]. Nous avons à notre disposition :

- Images de Température de Surface ;
- Champ de vecteurs vitesse de circulation à la surface, $\mathbf{w}_{\text{OPA}} = (u, v)^T$.

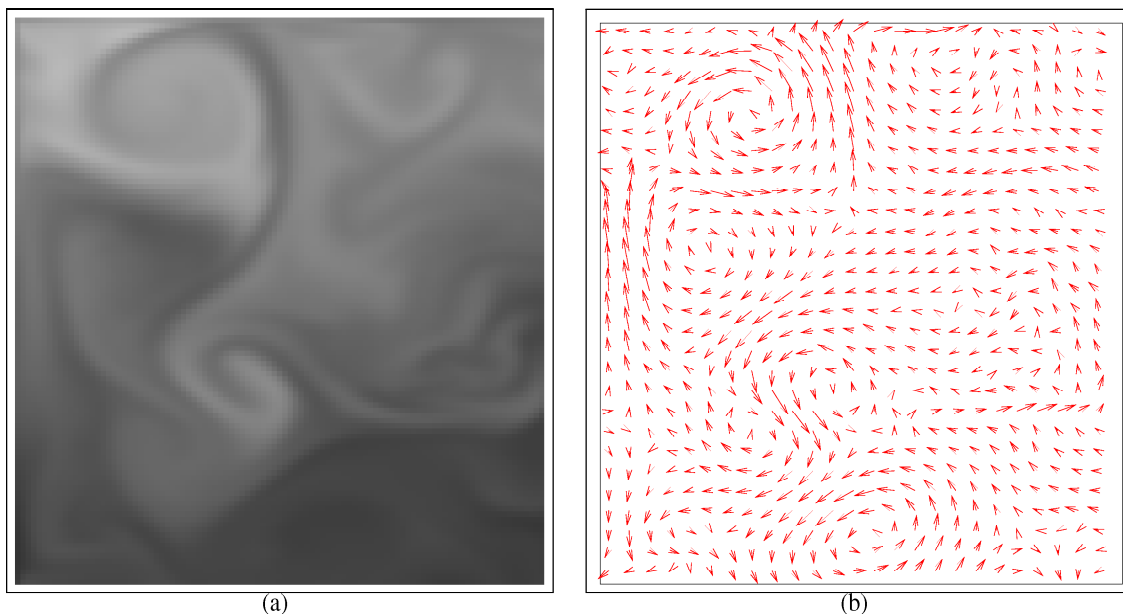


FIG. 9.1 – Données obtenues par simulation **OPA** (plan 52 de la séquence). (a) Température de surface ; (b) Champ de vecteurs vitesse.

Ces deux types de données sont illustrées sur la figure 9.1 et fournissent une représentation réaliste de la surface de l'océan. On peut distinguer des structures océanographiques caractéristiques : *i*) **tourbillons de taille et durée variées** ; *ii*) **front**, correspondant à la ligne de démarcation entre deux masses d'eau de températures différentes. Le mouvement d'un front est parallèle au gradient de température ou de concentration ; *iii*) **filament d'éjection d'un tourbillon**. C'est une structure allongée, relativement stable dans le temps, la vitesse à l'intérieur est forte, et orientée dans la direction perpendiculaire au gradient spatial. Ces trois types de structures sont schématisées sur la figure 9.2. Les images de la séquence **OPA** sont de taille 99×109 pixels, et la séquence comporte 89 plans. Pour faciliter l'interprétation des résultats, nous avons estimé le mouvement entre les plans 52 et 53 de la séquence. Ces plans comportent toutes les structures océanographiques caractéristiques décrites plus haut. Les valeurs du champ de vecteurs vitesse **OPA**, en mètres/secondes, sont converties en pixels/plans pour l'interprétation des résultats.

9.1. Estimation du mouvement sur des données synthétiques

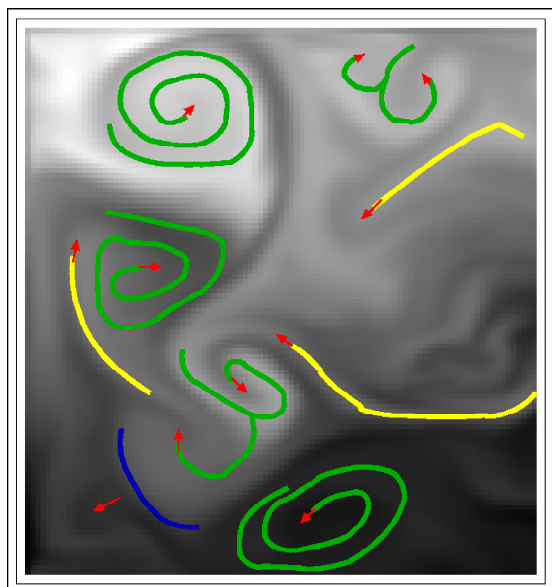


FIG. 9.2 – Structures océanographiques caractéristiques dans le plan 52 de la séquence **OPA** : tourbillons (en vert), filaments d'éjection des tourbillons (en jaune) et front (en bleu). Les flèches rouges indiquent le sens du mouvement des structures.

9.1.3 Intérêt

L'utilisation de la séquence obtenue par **OPA** offre plusieurs avantages. D'une part, les images sont comparables à celles acquises par les satellites océanographiques : la mesure et la résolution spatio-temporelle sont similaires, et la séquence présente un mouvement turbulent réaliste présentant des tourbillons de taille et durée variées, des filaments et des fronts. D'autre part, sur les images simulées par **OPA** il n'existe pas de nuage qui pourrait «masquer» l'information, comme cela est souvent le cas sur les données satellite. Enfin, **OPA** fournit le champ de déplacement associé aux simulations de Température de Surface de l'océan. Ce mouvement, dit «de référence», nous permet d'effectuer une étape de validation numérique en comparant les résultats obtenus par les modèles développés dans cette thèse à cette référence. Enfin, remarquons que le champ de vitesse tridimensionnel \mathbf{V} simulé par **OPA** possède une divergence nulle car l'eau est un fluide incompressible. La divergence du champ bidimensionnel des vitesses \mathbf{w} à la surface est non nulle mais très faible. Le tableau 9.1 présente les valeurs de divergence, de vorticité et de norme pour le plan 52 de la séquence. Les images de divergence, vorticité, norme et les lignes de courant associées sont illustrées figure 9.3. On peut remarquer que l'image de vorticité (figure 9.3(b)) code le sens des tourbillons : les valeurs négatives indiquent un mouvement de rotation dans le sens anti-horaire, tandis que les valeurs positives indiquent un mouvement de rotation dans le sens horaire.

| Champ OPA, plan 52 / valeurs | Min | Moy | Max |
|------------------------------|--------|--------|-------|
| Norme | 0.053 | 2.343 | 8.190 |
| Vorticité | -2.406 | -0.004 | 2.232 |
| Divergence | -0.445 | 0.003 | 0.528 |

TAB. 9.1 – Valeurs représentatives du champ **OPA** (en pixels/plan) pour le plan 52.

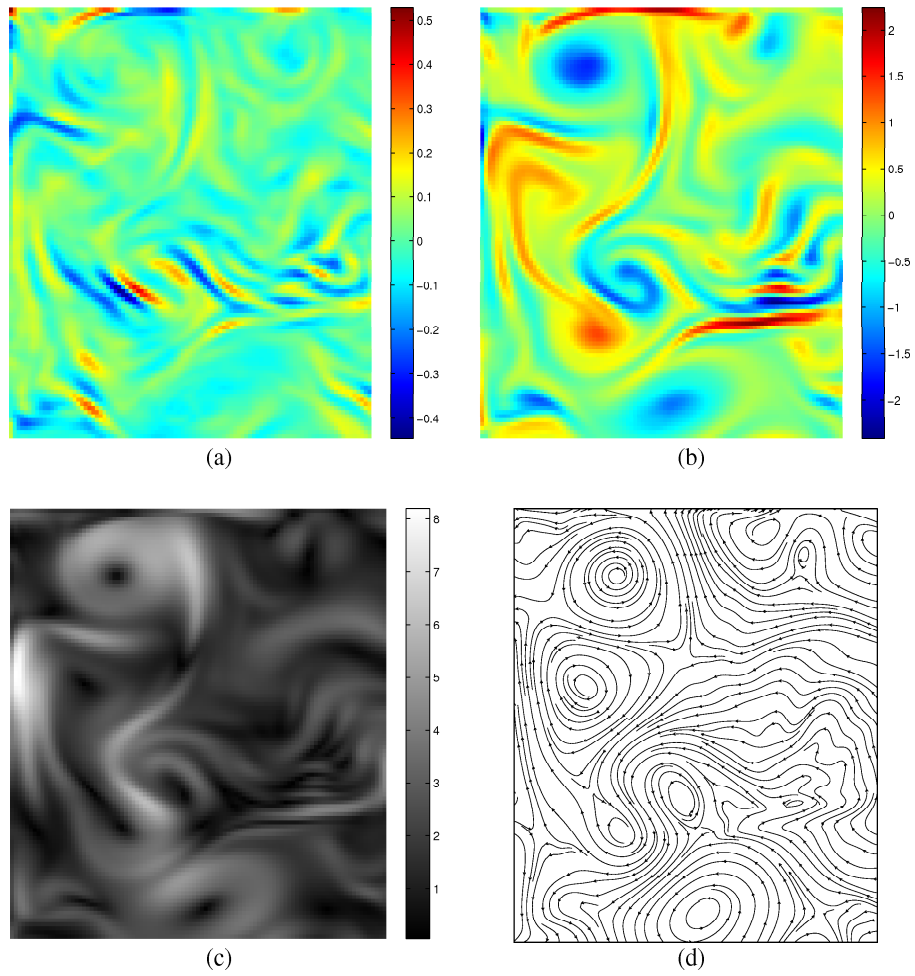


FIG. 9.3 – Divergence, vorticité, norme et lignes de courant du champ **OPA** pour le plan 52 de la séquence. (a) Divergence ; (b) vorticité ; (c) Norme ; (d) Lignes de courant.

9.1. Estimation du mouvement sur des données synthétiques

9.1.4 Stratégie de sélection des points de contrôle sur des données océanographiques

Avant de procéder à l'analyse des résultats, nous formulons une stratégie de sélection des points de contrôle. Nous avons montré dans le chapitre 4 que l'équation de conservation n'est pas valide sur tout le domaine image. Dans le cas de données océanographiques, cela se produit dans deux cas :

1. Les régions de l'image faiblement contrastées, car dans l'information n'y est pas exploitable ;
2. Les zones de l'image où le mouvement a une configuration spécifique, perpendiculaire au gradient spatial de l'image, et ne peut donc être estimé. Ce type de configuration est représenté sur la figure 9.4.

Ce triple constat nous incite à formuler une stratégie de sélection de points de contrôle en masquant les endroits de l'image où l'ECL n'est pas valide. Pour les données océanographiques, nous proposons une méthode qui analyse les deux cas pour lesquels l'équation de conservation n'est pas utilisable.

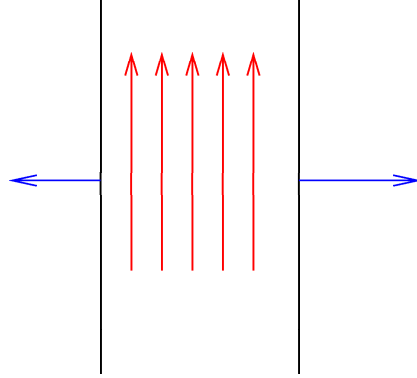


FIG. 9.4 – Représentation du mouvement à l'intérieur d'une structure de filament : le champ de vitesse (flèches rouges) est orthogonal au gradient spatial (flèches bleues).

• Cas 1 : région de l'image où l'information n'est pas exploitable.

Le cas est traité en masquant les zones de faible contraste, où le mouvement ne peut être observé. Cette étape est effectuée en faisant un double seuillage dans les images, comme décrit dans le chapitre 6 :

- Seuillage sur la norme du gradient :

$$\|\nabla I\| \geq \sigma_1 \quad (9.1)$$

pour ne garder que les endroits contrastés ;

- Seuillage sur un indice de mouvement :

$$\frac{|I_t|}{\|\nabla I\|} \geq \sigma_2 \quad (9.2)$$

pour ne garder que les régions où le mouvement est observable.

• **Cas 2 : région de l'image où le mouvement a une configuration spécifique.**

La seconde étape de sélection des points de contrôle consiste à ne garder que les points hors des zones correspondant à un mouvement spécifique, qui ne peut être estimé. En océanographie, les structures filamenteuses vérifient un mouvement perpendiculaire au gradient spatial. Les propriétés «image» des filaments sont telles que : *i)* leur niveau de gris est quasiment constant à l'intérieur de la structure ; *ii)* ils sont contrastés par rapport à leur environnement (plus sombres ou plus clairs) ; *iii)* leur forme est allongée, fine ; *iv)* leur déplacement d'une image à l'autre se fait dans le sens de la longueur, perpendiculairement au gradient spatial de l'image. La détection des filaments sur une image s'effectue en quatre étapes :

1. Détection des structures qui sont les plus claires ou les plus foncées dans les images.

Ces structures contiennent entre autres les structures de filaments, comme illustré sur la figure 9.5. Cette étape est effectuée à l'aide des opérateurs de morphologie mathématique *pics* et *vallées* [Serra, 1982] :

$$Pics(I) = I - (I \circ B) \quad (9.3)$$

$$Vallées(I) = (I \bullet B) - I, \quad (9.4)$$

où B est un élément structurant, c'est-à-dire un voisinage autour de chaque point de l'image. Les opérateurs $(I \circ B)$ et $(I \bullet B)$ sont l'*ouverture* et la *fermeture* de l'image I par l'élément structurant B :

$$(I \circ B) = (I \ominus B) \oplus B \quad (9.5)$$

$$(I \bullet B) = (I \oplus B) \ominus B, \quad (9.6)$$

où $(I \ominus B)$ et $(I \oplus B)$ sont l'*érosion* et la *dilatation* de l'image I par l'élément structurant B . L'*érosion* de la fonction intensité de l'image I par un élément structurant B est une fonction définie par :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, (I \ominus B)(\mathbf{x}) = \inf \{I(\mathbf{y}) / \mathbf{y} \in B_{\mathbf{x}}\}. \quad (9.7)$$

La *dilatation* de la fonction intensité de l'image I par un élément structurant B est une fonction définie par :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, (I \oplus B)(\mathbf{x}) = \sup \{I(\mathbf{y}) / \mathbf{y} \in B_{\mathbf{x}}\}, \quad (9.8)$$

où Ω est le domaine image, un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Un seuillage sur les valeurs de luminance extrémales, dans les images filtrées par les opérateurs *pics* et *vallées*, permet de ne garder que les composantes connexes S_k , de centre de gravité Sg_k .

- 2. Sélection des structures de forme allongée.** Pour chacune des structures détectées, la matrice de covariance Σ et son inverse, sont calculées. Les vecteurs propres de Σ^{-1} donnent la direction des axes principaux, petit axe et grand axe. En effectuant un seuillage et en utilisant la distance de Mahalanobis entre un centre de gravité Sg_k et un point \mathbf{x} d'une structure connexe de Ω , il est possible de ne garder que les nuages de points de forme allongée.

9.1. Estimation du mouvement sur des données synthétiques

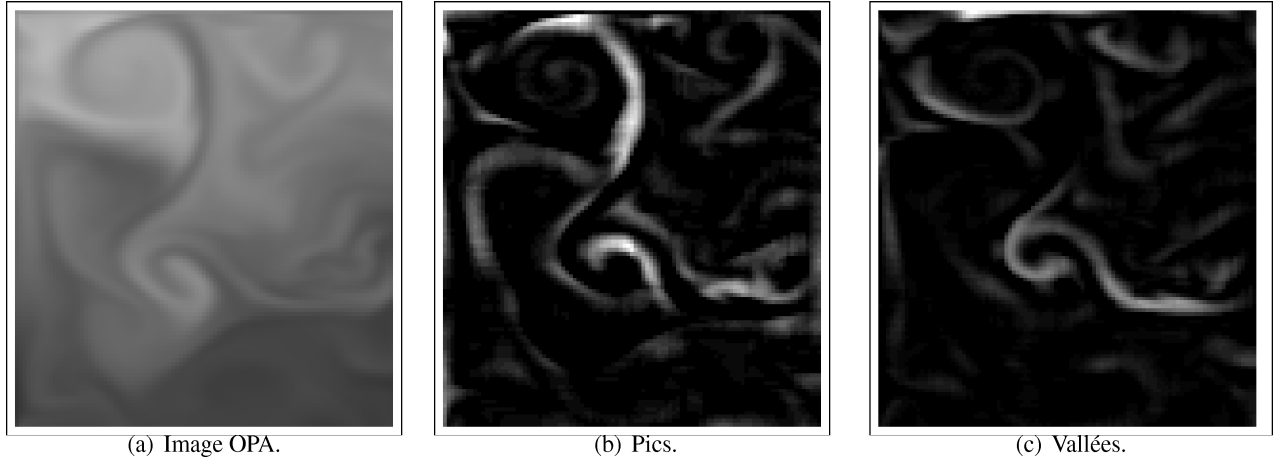


FIG. 9.5 – Image de la séquence **OPA** après traitement par les opérateurs morphologiques *pics* et *vallées*.

3. **Sélection des structures dont le mouvement est dans le sens de leur longueur.** Sur l'image au temps t , on a k structures connexes $S_1^t \dots S_k^t$, de centres $S g_i^t$, et de matrices de covariances Σ_i^t . Sur l'image au temps $t + 1$, on a n structures connexes $S_1^{t+1} \dots S_n^{t+1}$, de centres $S g_i^{t+1}$, et de matrices de covariances Σ_i^{t+1} . Alors, S_i^{t+1} est appariée à S_j^t tel que :

$$d^* = d_{\Sigma_j^t}(S g_i^{t+1}, S g_j^t), \text{ soit minimale,}$$

où $d_{\Sigma_j^t}$ est la distance de Mahalanobis associée à la matrice Σ_j^t .

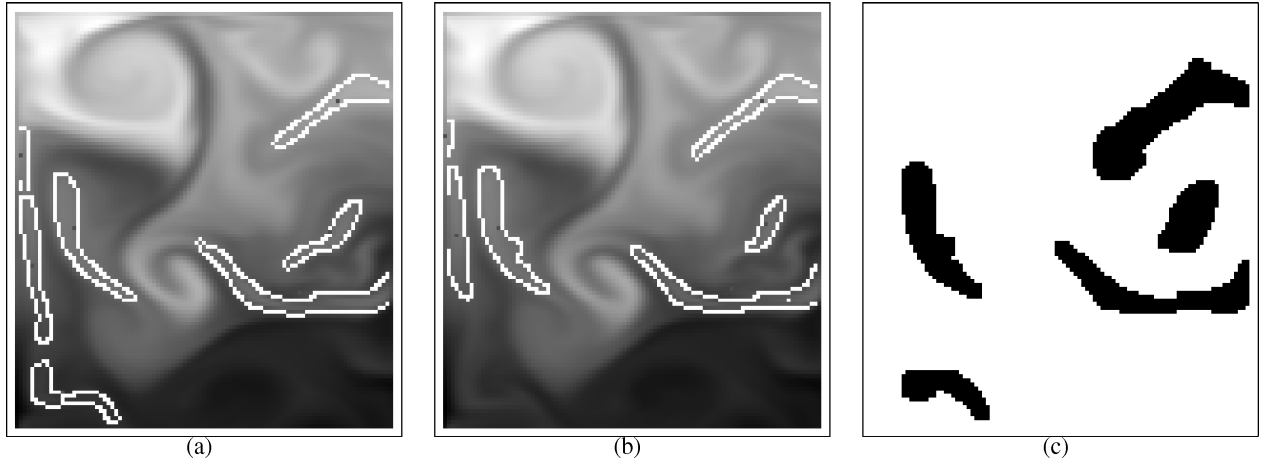


FIG. 9.6 – Structures filamenteuses détectées sur l'image 52 et 53 de la séquence OPA. (a) Filaments détectés sur l'image 52 ; (b) Filaments détectés sur l'image 53 ; (c) Résultat de l'appariement des structures correspondantes entre les deux images.

9.1.5 Critères d'erreurs quantitatifs

Nous comparons les champs de mouvement obtenus par les modèles avec le champ de référence obtenu par la simulation du modèle **OPA**. Nous avons sélectionné quatre mesures d'erreur, qui paraissent être les plus pertinentes pour une analyse quantitative des résultats :

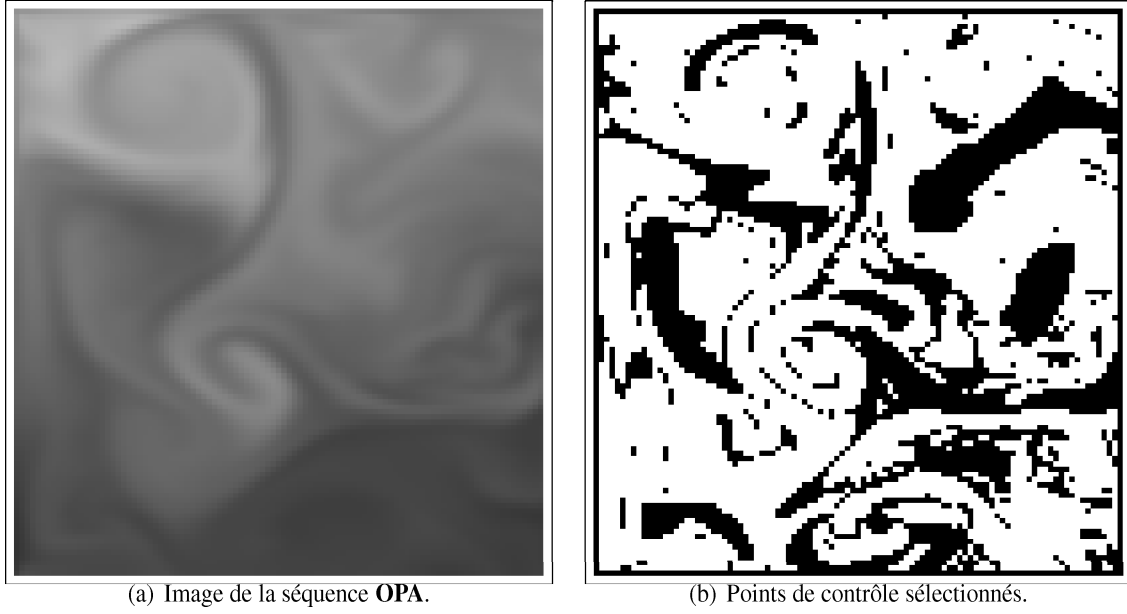


FIG. 9.7 – Points de contrôle sélectionnés (7363, en blanc) pour l'estimation du mouvement avec les valeurs de seuil $\sigma_1 = 0.01$ et $\sigma_2 = 0.3$ lorsque les zones de filaments sont masquées.

1. Erreur relative sur la norme euclidienne :

$$\mathbf{E}_n(\mathbf{w}_{\text{OPA}}, \mathbf{w}_{\text{modèle}}) = \frac{1}{M} \sum_{\|\mathbf{w}_{\text{OPA}}\| \neq 0} \left| \frac{\|\mathbf{w}_{\text{OPA}}\| - \|\mathbf{w}_{\text{modèle}}\|}{\|\mathbf{w}_{\text{OPA}}\|} \right|, \quad (9.9)$$

où M est le nombre de points de contrôle tel que la norme des vecteurs w_{OPA} est non nulle ;

2. Erreur angulaire :

$$\mathbf{E}_{a2}(\mathbf{w}_{\text{OPA}}, \mathbf{w}_{\text{modèle}}) = \frac{1}{P} \sum_{\|\mathbf{w}_{\text{OPA}}\|, \|\mathbf{w}_{\text{modèle}}\| \neq 0} \arccos \left(\frac{\mathbf{w}_{\text{OPA}}}{\|\mathbf{w}_{\text{OPA}}\|}, \frac{\mathbf{w}_{\text{modèle}}}{\|\mathbf{w}_{\text{modèle}}\|} \right), \quad (9.10)$$

où P est le nombre de points tel que la norme des vecteurs w_{OPA} et $w_{\text{modèle}}$ est non nulle ;

3. Erreur quadratique en vorticité :

$$\mathbf{E}_v(\mathbf{w}_{\text{OPA}}, \mathbf{w}_{\text{modèle}}) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{\zeta_{\text{OPA}} \neq 0} \left(\frac{\zeta_{\text{OPA}} - \zeta_{\text{modèle}}}{\zeta_{\text{OPA}}} \right)^2}, \quad (9.11)$$

où ζ_{OPA} est le rotationnel du champ **OPA** et $\zeta_{\text{modèle}}$ celui du champ estimé par le modèle ;

4. Erreur quadratique en divergence :

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{w}_{\text{OPA}}, \mathbf{w}_{\text{modèle}}) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{\eta_{\text{OPA}} \neq 0} \left(\frac{\eta_{\text{OPA}} - \eta_{\text{modèle}}}{\eta_{\text{OPA}}} \right)^2}, \quad (9.12)$$

où η_{OPA} est la divergence du champ **OPA** et $\eta_{\text{modèle}}$ celle du champ estimé par le modèle.

9.1. Estimation du mouvement sur des données synthétiques

Nous considérons ces quatre critères sur les estimations de mouvement faites entre les plans 52 et 53 de la séquence **OPA**. La sélection des points de contrôle est effectuée suivant la stratégie décrite dans le paragraphe précédent. Nous avons utilisé les modèles avec les paramètres de lissage α et β , de la contrainte de régularité **DR2O**, choisis de telle manière que le champ de mouvement ait des variations maximale en vorticité et minimale en divergence (c'est-à-dire pour α grand devant β). Ceci se justifie par le fait que dans les séquences océanographiques, le mouvement à la surface possède une divergence quasi-constante, proche de zéro, et une vorticité dont les variations spatiales sont fortes.

9.1.6 Résultats des modèles

Le champ de référence est présenté sur la figure 9.8(a), et les lignes de courant correspondantes sur la figure 9.9(a). Les estimations effectuées par les modèles **PUSP** (chapitre 6), **AMSV** (chapitre 7) et **GFME** (chapitre 8) sont présentées sur les figures 9.8(b), 9.8(c) et 9.8(d). Les lignes de courant associées sont illustrées sur les figures 9.9(b), 9.9(c) et 9.9(d). A titre d'exemple, le champ de vecteurs vitesse (et les lignes de courant) obtenu par le modèle de Horn et Schunck [Horn et Schunck, 1981] est présenté sur la figure 9.10. Les résultats de calculs d'erreurs (section 9.1.5) entre le champ **OPA** et les champs estimés par les modèles **PUSP**, **AMSV**, **GFME** et de Horn et Schunck sont présentés dans le tableau 9.2.

En comparant le champ **OPA** aux trois champs obtenus par les modèles **PUSP**, **AMSV** et **GFME**, on constate que les gros tourbillons sont relativement bien visualisés par les modèles. Plus particulièrement, on peut remarquer que la plupart des tourbillons sont convenablement localisés, mais pas certains petits. C'est notamment le cas de ceux situés en haut à droite de l'image. Ceci s'explique par le fait que ces petits tourbillons sont situés sur le bord de l'image : dans ces zones, il est possible que les points de contrôle sélectionnés n'apportent pas suffisamment d'information pour une bonne visualisation. Sur les zones laminaire, le mouvement est également estimé.

On remarque que le champ de vecteurs obtenu par le modèle de Horn et Schunck ne correspond pas à celui du champ de référence : aucun tourbillon n'est observé et seul le mouvement laminaire semble être visualisé. Ceci s'explique par le fait que la contrainte de régularité utilisée dans le modèle de Horn et Schunck ne permet pas de contrôle sur les variations en divergence et en vorticité du champ.

Les modèles **PUSP** et **GFME** donnent des champs de vecteurs plus «lisses» que celui calculé par **AMSV**. L'explication tient au fait que les modèles **PUSP** et **GFME** font un compromis entre l'**ECL** et la contrainte de régularité **DR2O** (paramètre λ non nul), alors que le modèle **AMSV** fait une «quasi-interpolation» sans effectuer de compromis entre l'équation de conservation et la contrainte de régularité.

Quantitativement, le tableau 9.2 fait ressortir que les meilleurs résultats sont obtenus par le modèle **GFME**, excepté concernant l'erreur quadratique en divergence E_d . On constate que les erreurs angulaires E_a des modèles **PUSP**, **AMSV** et **GFME** sont toutes plus faibles que celles du champ estimé par le modèle de Horn et Schunck. Cela indique que ces modèles estiment mieux la direction des vecteurs que le modèle de Horn et Schunck. Ce résultat est lié au formalisme spline utilisé, qui estime le mouvement à partir de points de contrôle où l'équation de conservation est vérifiée, et à l'emploi de la contrainte de régularité **DR2O**, adaptée au mouve-

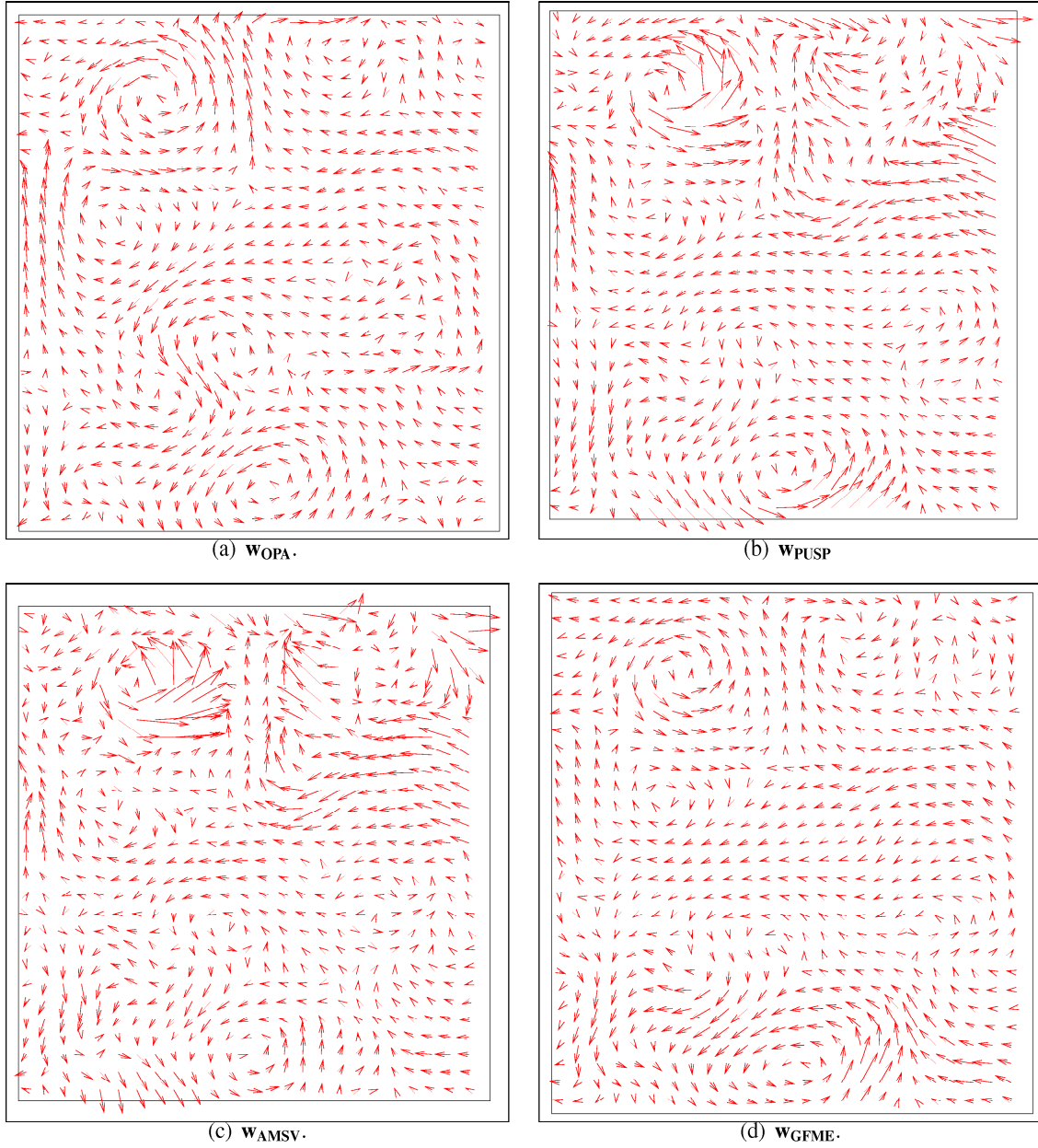


FIG. 9.8 – Champs de vecteurs vitesse (en pixel/plan). (a) Champ **OPA** ; (b) Champ estimé par le modèle **PUSP** avec les paramètres $\lambda = 1, \alpha = 0.9, \beta = 0.1$; (c) Champ estimé par le modèle **AMSV** sur l'ensemble $X_3 = 1338$, avec les paramètres $h = 12, \alpha = 0.9, \beta = 0.1$; (d) Champ estimé par le modèle **GFME**, avec les paramètres $h = 4, \lambda = 1, \alpha = 0.9, \beta = 0.1$.

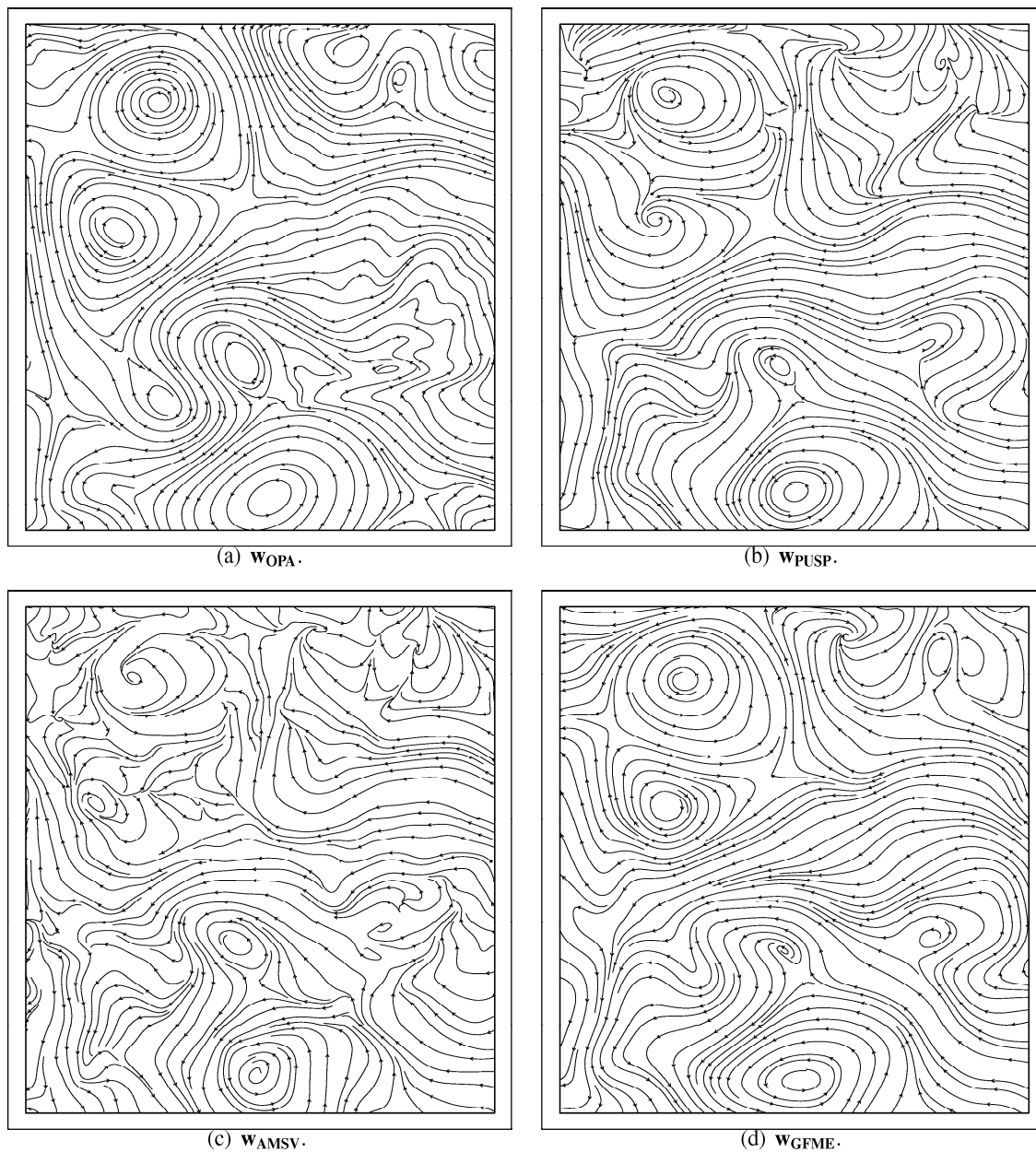


FIG. 9.9 – Lignes de courant : (a) Champ **OPA** ; (b) Champ estimé par le modèle **PUSP** avec les paramètres $\lambda = 0.1$, $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.1$; (c) Champ estimé par le modèle **AMSV** sur l'ensemble $X_3 = 1338$, avec les paramètres $h = 12$, $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.1$; (d) Champ estimé par le modèle **GFME** avec les paramètres $h = 4$, $\lambda = 1$, $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.1$.

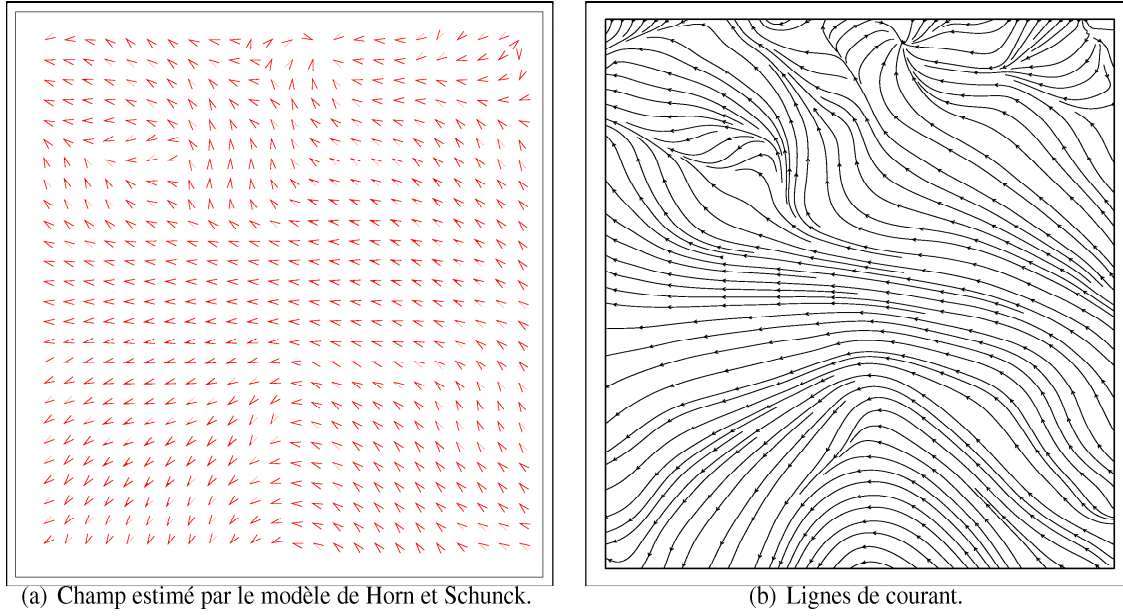


Fig. 9.10 – Estimation du mouvement apparent sur la séquence **OPA** par le modèle de Horn et Schunck : résolution itérative en tout point de l'image d'après l'**ECL** et la régularisation en norme L_2 . (a) Champ estimé sur 2000 itérations, $\lambda = 1$; (b) Lignes de courant.

ment fluide. Le modèle de Horn et Schunck fait une résolution itérative en tout point de l'image, même dans les régions de l'image où l'équation de conservation n'est pas vérifiée, et emploie une contrainte de régularité inadaptée au mouvement fluide. Du point de vue de l'erreur en norme E_n , seuls les modèles **GFME** et **PUSP** donnent des meilleurs résultats que le modèle de Horn et Schunck. Il est curieux de constater que l'erreur en vorticité de **AMSV** est légèrement plus élevée que celle du modèle de Horn et Schunck, qui ne localise aucun tourbillon (voir figure 9.10). Il en est de même pour les erreurs en divergence des modèles, toutes plus élevées que celle du modèle de Horn et Schunck. Au vu des résultats qualitatifs, il est possible que les erreurs E_d et E_v , qui sont des erreurs moyennes, ne soient pas suffisamment pertinentes pour décrire les champs estimés.

Un fait intéressant est que le modèle **GFME**, dont la fonction mère ne minimise pas exactement la contrainte de régularité **DR2O**, estime quantitativement «mieux» le mouvement que le modèle **PUSP**. Pourtant, **PUSP** estime le mouvement avec une fonction mère qui minimise exactement la contrainte de régularité **DR2O**. Une explication possible est que **GFME** fait une estimation multi-échelles du mouvement, et pas **PUSP**. En regardant les lignes de courant des deux modèles (figures 9.9(b) et 9.9(d)), on constate que **GFME** localise les petits tourbillons mais pas **PUSP**. Cela semble cohérent avec l'approche multi-échelles de **GFME** : le modèle estime le mouvement comme une somme d'incrément de mouvements calculés à diverses échelles, basses et hautes. En revanche, **PUSP** ne permet l'estimation du mouvement qu'à l'échelle locale.

1

Dans les sous-sections suivantes, nous expliquons plus en détails les résultats obtenus par chacun des modèles proposés dans cette thèse.

9.1. Estimation du mouvement sur des données synthétiques

(a)

| Erreurs / valeurs | Min | Moy | Max |
|-------------------|-----|--------|---------|
| E_n | 0 | 0.604 | 32.677 |
| E_a | 0 | 33.395 | 179.963 |
| E_d | 0 | 0.346 | 3.243 |
| E_v | 0 | 0.191 | 0.985 |

(b)

| Erreurs / valeurs | Min | Moy | Max |
|-------------------|-------|--------|---------|
| E_n | 0 | 0.915 | 47.815 |
| E_a | 0.001 | 40.359 | 179.929 |
| E_d | 0 | 0.807 | 18.311 |
| E_v | 0 | 0.253 | 1.183 |

(c)

| Erreurs / valeurs | Min | Moy | Max |
|-------------------|-------|--------|---------|
| E_n | 0 | 0.572 | 62.599 |
| E_a | 0.002 | 28.397 | 179.856 |
| E_d | 0 | 0.238 | 3.517 |
| E_v | 0 | 0.1901 | 0.872 |

(d)

| Erreurs / valeurs | Min | Moy | Max |
|-------------------|-------|--------|---------|
| E_n | 0 | 0.729 | 7.458 |
| E_a | 0.003 | 50.116 | 179.979 |
| E_d | 0 | 0.174 | 0.974 |
| E_v | 0 | 0.220 | 0.968 |

TAB. 9.2 – Erreurs quantitatives des modèles. (a) **PUSP** ; (b) **AMSV** ; (c) **GFME** ; (d) Horn et Schunck.

9.1.6.1 Résultats du modèle PUSP

Le modèle **PUSP** est défini dans le chapitre 6 et fait une estimation du mouvement d'après l'**ECL** ou l'**ECM** et la contrainte de régularité **DR2O**. L'implémentation numérique du modèle repose sur une partition de l'unité et une implémentation *quadtree*. Un exemple de résultat de **PUSP** est présenté sur la figures 9.8(b) (champ de mouvement) et 9.9(b) (lignes de courant).

De manière expérimentale, nous avons remarqué que, si les cellules du *quadtree* sont trop petites, les résultats de l'approximation sont mauvais. Ceci s'explique par le fait que, plus les cellules sont petites, plus l'approximation est sensible au bruit, car peu de points de contrôle sont sélectionnés pour estimer le mouvement. Ce problème peut être géré en utilisant un paramètre de pondération λ non nul, ce qui permet de s'écarter des mesures. Ainsi, l'influence de la contrainte de régularité **DR2O** est plus forte que celle du terme d'attache aux données dans le processus d'estimation du mouvement. Le champ estimé est donc plus «lisse».

Qualitativement, on constate que le modèle estime plutôt bien le mouvement dans les régions texturées ou de fort gradient spatial, c'est-à-dire où l'information est importante. En revanche, le modèle estime moins bien le mouvement dans les zones qui contiennent peu ou pas de points de contrôle et où peu ou pas d'information est disponible. Le mouvement vient alors de la contrainte de régularité **DR2O**.

9.1.6.2 Résultats du modèle AMSV

Le modèle **AMSV** (chapitre 7) fait une estimation multi-échelles du mouvement basée sur l'**ECL** et la fonction mère à support compact issue du quasi-interpolant vectoriel vérifiant la contrainte de régularité **DR2O**. L'estimation multi-échelles repose sur des sous-ensembles de points de contrôle, générés par un algorithme de décimation.

La figure 9.11 illustre le résultat de l'estimation multi-échelles du mouvement sur la séquence **OPA**. L'estimation est faite à partir de quatre sous-ensembles de points de contrôle : $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset X_3$ avec respectivement 21, 85, 334 et 1338 points de contrôle. Les ensembles X_0 , X_1 , X_2 , et X_3 sont illustrés sur les figures 9.11(a), 9.11(b), 9.11(c) et 9.11(d). Les estimations du mouvement \mathbf{w}_{X_0} , \mathbf{w}_{X_1} , \mathbf{w}_{X_2} et \mathbf{w}_{X_3} faites à partir de ces ensembles sont présentées sur les figures 9.11(e), 9.11(f), 9.11(g) et 9.11(h). A chaque échelle, le choix du paramètre h dépend de la distance de remplissage du sous-ensemble considéré.

Le choix du nombre de sous-ensembles de points de contrôle, et celui de leurs tailles, sont des problèmes difficiles. Nous choisissons un critère d'arrêt automatique en fonction du rayon couvrant local (7.5), afin de générer le premier sous-ensemble de points de contrôle, de plus forte densité spatiale. Ce critère est :

$$r(\mathbf{y}) \leq \sqrt{2}. \quad (9.13)$$

Ce seuillage nous permet d'obtenir un premier sous-ensemble où quasiment aucun point de contrôle n'est adjacent à un autre. Nous choisissons de générer les sous-ensembles suivant une séquence géométrique :

$$\text{Card}(X_{k-1}) = \lfloor \frac{1}{4} \text{Card}(X_k) \rfloor. \quad (9.14)$$

On constate qu'aux basses échelles, c'est-à-dire pour des valeurs de h grandes, seul le mouvement «laminaire» est observé et les tourbillons apparaissent peu ou pas (figure 9.11(i)). A

9.1. Estimation du mouvement sur des données synthétiques

mesure que la valeur de h diminue et que le nombre de points de contrôle augmente, l'estimation devient plus fine : les gros tourbillons commencent par être visualisés (figures 9.11(j) et 9.11(k)), puis les «détails», comme les petits tourbillons, apparaissent (figure 9.11(l)).

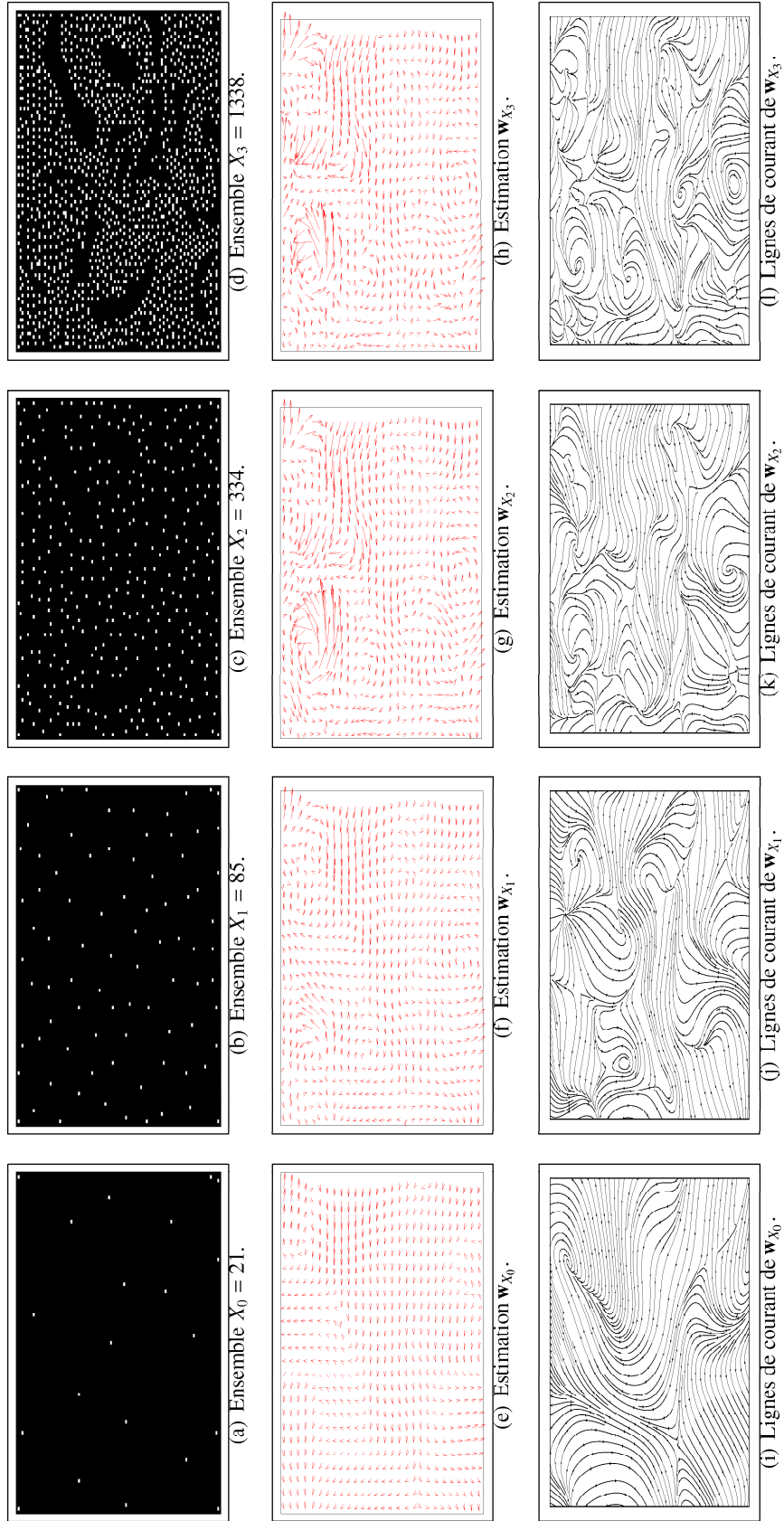


Fig. 9.11 – Estimation multi-échelles du mouvement par le modèle AMSV. Les champs (e) w_{X_0} , (f) w_{X_1} , (g) w_{X_2} , et (h) w_{X_3} sont calculés à partir des ensembles de points de contrôle (a) $X_0 = 21$, (b) $X_1 = 85$, (c) $X_2 = 334$, et (d) $X_3 = 1338$ points de contrôle.

9.1. Estimation du mouvement sur des données synthétiques

9.1.6.3 Méthode de représentation multi-échelles d'un champ de vecteurs

La méthode de représentation multi-échelles est définie dans le chapitre 7. Elle permet de représenter, à différentes échelles, un champ de vecteurs déjà calculé, qui peut être par exemple issu de l'estimation du mouvement par les modèles **PUSP**, **AMSV** ou **GFME**. Nous présentons un exemple de résultat d'un champ de vecteurs initialement calculé par le modèle **AMSV**. Les vecteurs initiaux sont illustrés sur la figure 9.12(b), et consistent en un ensemble de 1338 vecteurs mouvement. Ces vecteurs mouvement sont calculés sur l'ensemble des points de contrôle X_3 , illustré sur la figure 9.12(a).

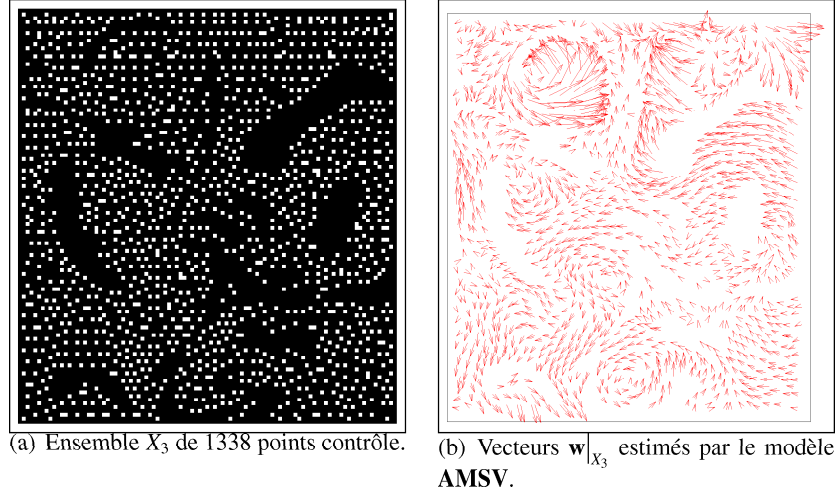


FIG. 9.12 – Champ de vecteurs et ensemble des points de contrôle sélectionnés pour la méthode de représentation multi-échelles du mouvement.

Le champ de vecteurs initial, $w|_{X_3}$, est approximé à quatre échelles, définies par les ensembles de points de contrôle $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset X_3$, sur tout le domaine image. Les résultats des champs approximatés, leurs lignes de courant, ainsi que les ensembles X_0 , X_1 , X_2 et X_3 sont illustrés sur la figure 9.13. Comme pour le modèle d'estimation multi-échelles **AMSV**, on constate qu'aux basses échelles (h grand) le mouvement est plutôt laminaire (figure 9.13(i)). Aux fines échelles (h petit), et à mesure que l'on ajoute de l'information, les détails apparaissent. De cette manière, les gros tourbillons commencent par être localisés dès les basses échelles (figure 9.13(j)), et les petits tourbillons ne le sont que sur les plus fines échelles (figures 9.13(k) et 9.13(l)).

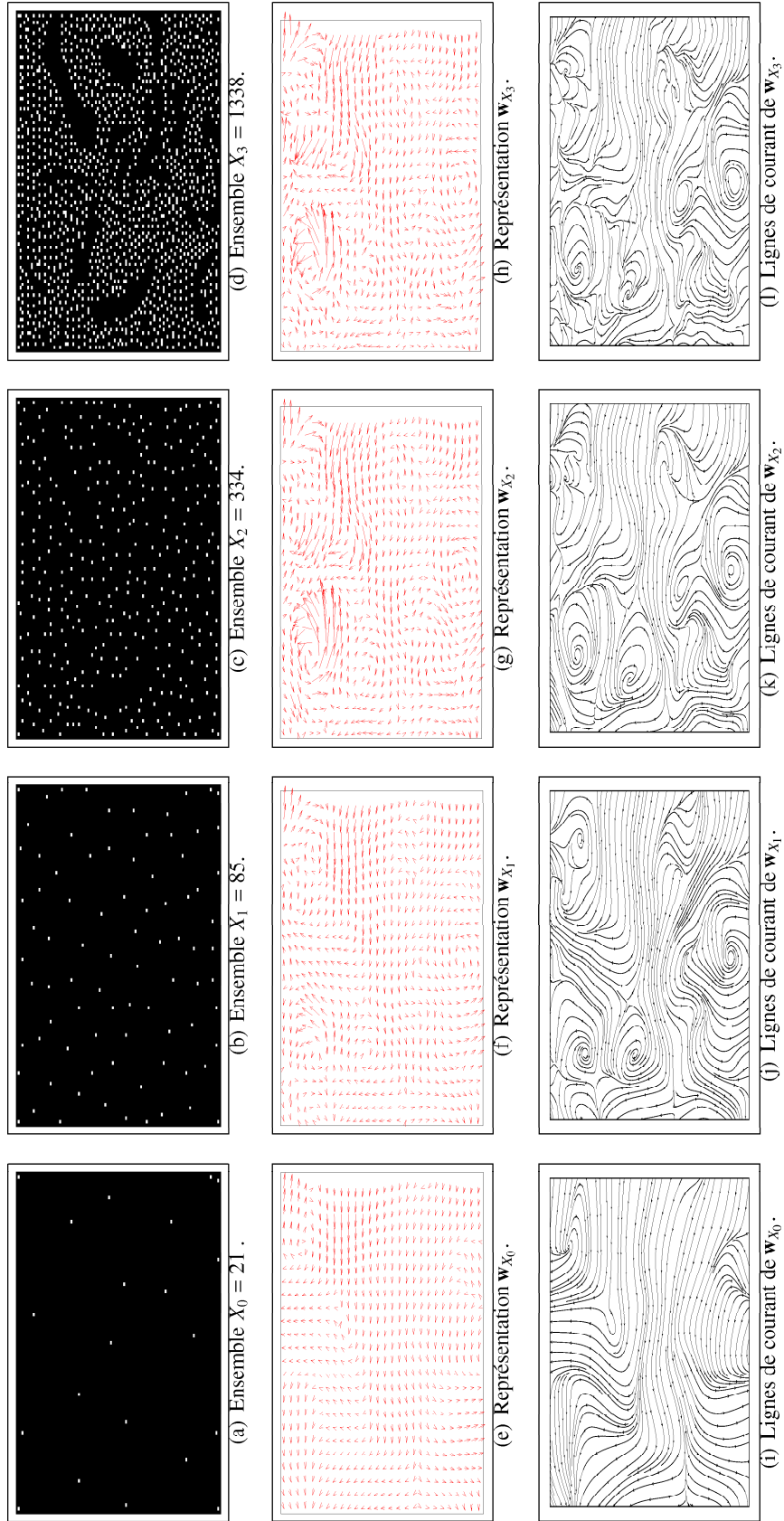


Fig. 9.13 – Représentation multi-échelles d'un champ de vecteurs calculé par le modèle AMSV. Les champs (e) w_{X_0} , (f) w_{X_1} , (g) w_{X_2} , et (h) w_{X_3} sont calculés à partir des ensembles de points de contrôle (a) $X_0 = 21$, (b) $X_1 = 85$, (c) $X_2 = 334$, et (d) $X_3 = 1338$ points de contrôle.

9.2. Estimation du mouvement sur les images satellite

9.1.6.4 Résultats du modèle GFME

Le modèle **GFME** (chapitre 8) fait une estimation multi-échelles du mouvement d'après l'**ECL** ou l'**ECM** et la contrainte de régularité **DR2O**. Il utilise une fonction mère à support compact, translatée sur une grille régulière de pas h . Un exemple de résultat du modèle **GFME** est présenté sur la figure 9.8(d) (champ de mouvement) et 9.9(d) (lignes de courant).

Le paramètre de pondération λ est choisi manuellement, proportionnel à l'échelle h considérée et en fonction du «bruit» contenu dans les données. Le choix du paramètre d'échelle h devrait dépendre de la taille des structures dont on cherche à estimer le mouvement : plus la valeur de h est petite et plus les échelles sont fines, correspondant aux «détails». Inversement, plus la valeur de h est grande, plus le mouvement est estimé à basse échelle et «grossier». Le choix du paramètre d'échelle peut aussi se faire en fonction des distances de séparation et de remplissage de l'ensemble des points de contrôle sélectionnés.

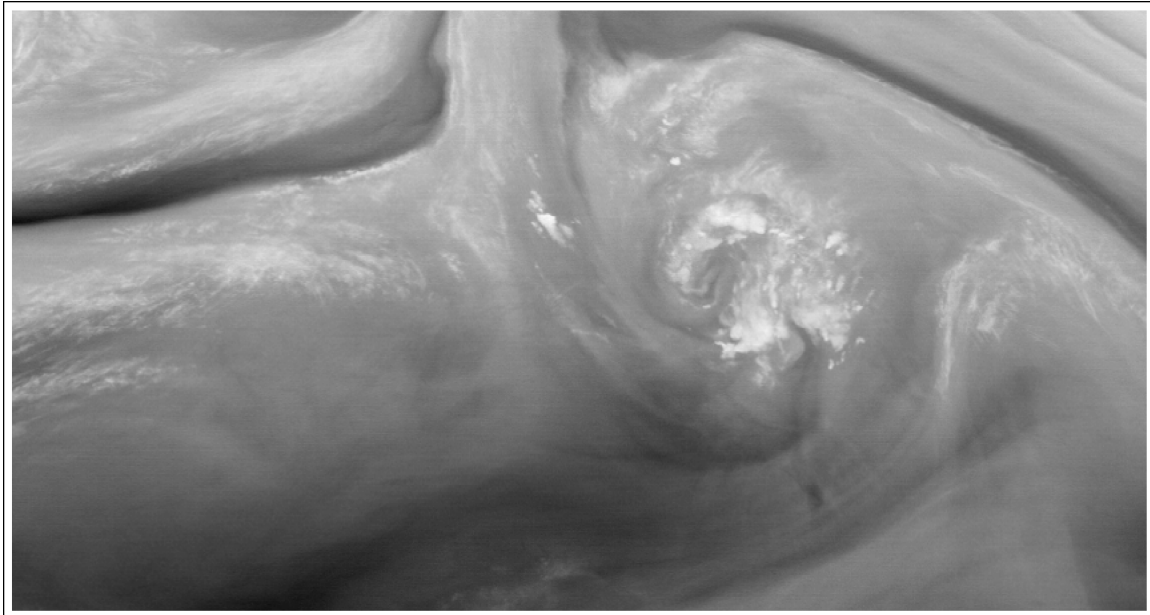
On remarque que les champs estimés par le modèle **GFME** sont très «lisses», ce qui s'explique par le fait que le modèle fait un compromis entre les données à approximer et la contrainte de régularité **DR2O**. En fait, plus λ est grand et plus le champ résultat est «lissé» en fonction des critères de régularité en divergence et en vorticité. Qualitativement, sur la séquence **OPA**, le modèle visualise parfaitement les gros tourbillons et de manière assez satisfaisante les plus petits. Le mouvement calculé à pleine résolution est très proche du champ de référence.

Le calcul de la solution de **GFME** est de loin le plus rapide des trois modèles présentés. En effet, la solution dépend du pas de la grille régulière h , qui définit la «résolution» à laquelle est calculé le mouvement. En général, le nombre de points de la grille régulière est beaucoup plus petit que le nombre des points de contrôle, sur lesquels s'appuient les modèles **AMSV** et **PUSP** pour calculer une solution.

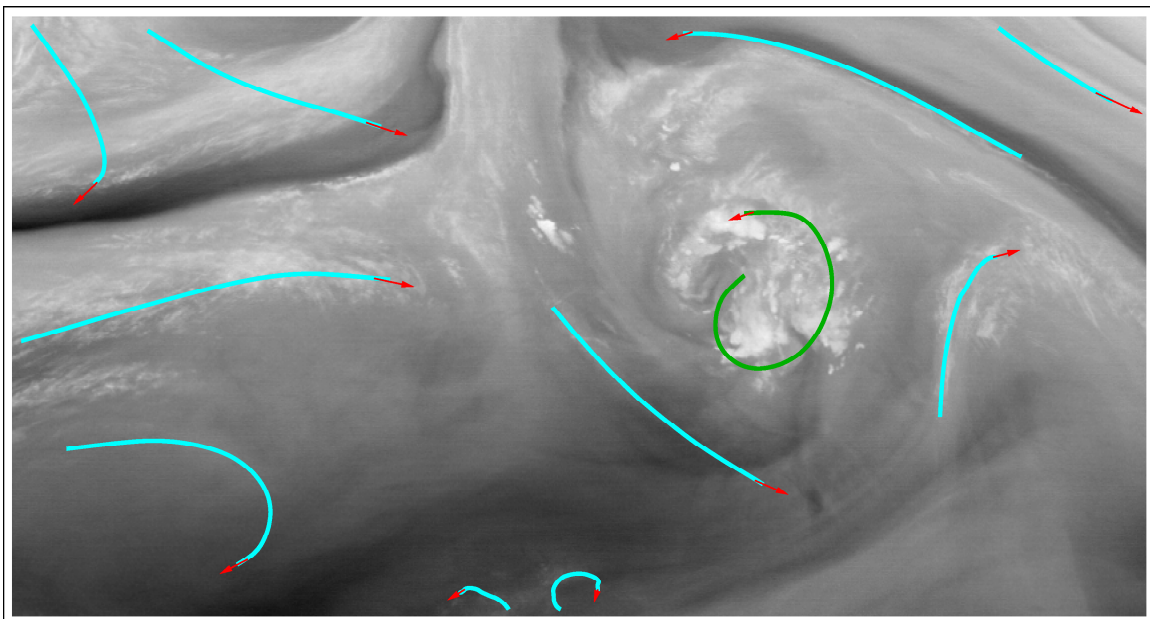
9.2 Estimation du mouvement sur les images satellite

Dans le cas des données météorologiques nous faisons l'hypothèse que les termes de source (phénomène de transfert radiatif, principalement) et de puits (phénomène de transport vertical) sont négligeables. Les points de contrôle sont sélectionnés uniquement en fonction des valeurs σ_1 ( quation (9.1)) et σ_2 ( quation (9.1)), ce qui correspond au cas 1 de la section 9.1. Les meilleures valeurs de seuils sont trouvées empiriquement.

Les modèles estiment le mouvement sur les images des canaux infrarouge et vapeur d'eau de Météosat avec l'**ECM** et la contrainte de régularité **DR2O**. La figure 9.14(a) présente une image extraite du canal vapeur d'eau. La séquence complète comporte 10 plans de 852×451 pixels, illustrés sur la figure 9.15. Les structures météorologiques présentes sont caractéristiques d'un mouvement turbulent : divergence, vortex, explosion convective. La figure 9.14(b) schématise le mouvement entre les plans 5 et 6. Dans le but de faciliter l'interprétation des résultats, l'estimation du mouvement par les différents modèles a été faite entre ces deux plans consécutifs.



(a) Plan 5 de la séquence.



(b) Schéma des mouvements entre les plans 5 et 6 de la séquence.

FIG. 9.14 – Exemple d'image extraite d'une séquence Météosat dans le canal vapeur d'eau. La séquence présente des structures caractéristiques d'un mouvement turbulent : zone de divergence (en haut à gauche), vortex tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (au centre droit). Sur la figure (b) les traits cyans et les flèches rouges représentent la direction du mouvement. Le trait vert représente le mouvement de la structure de vortex.

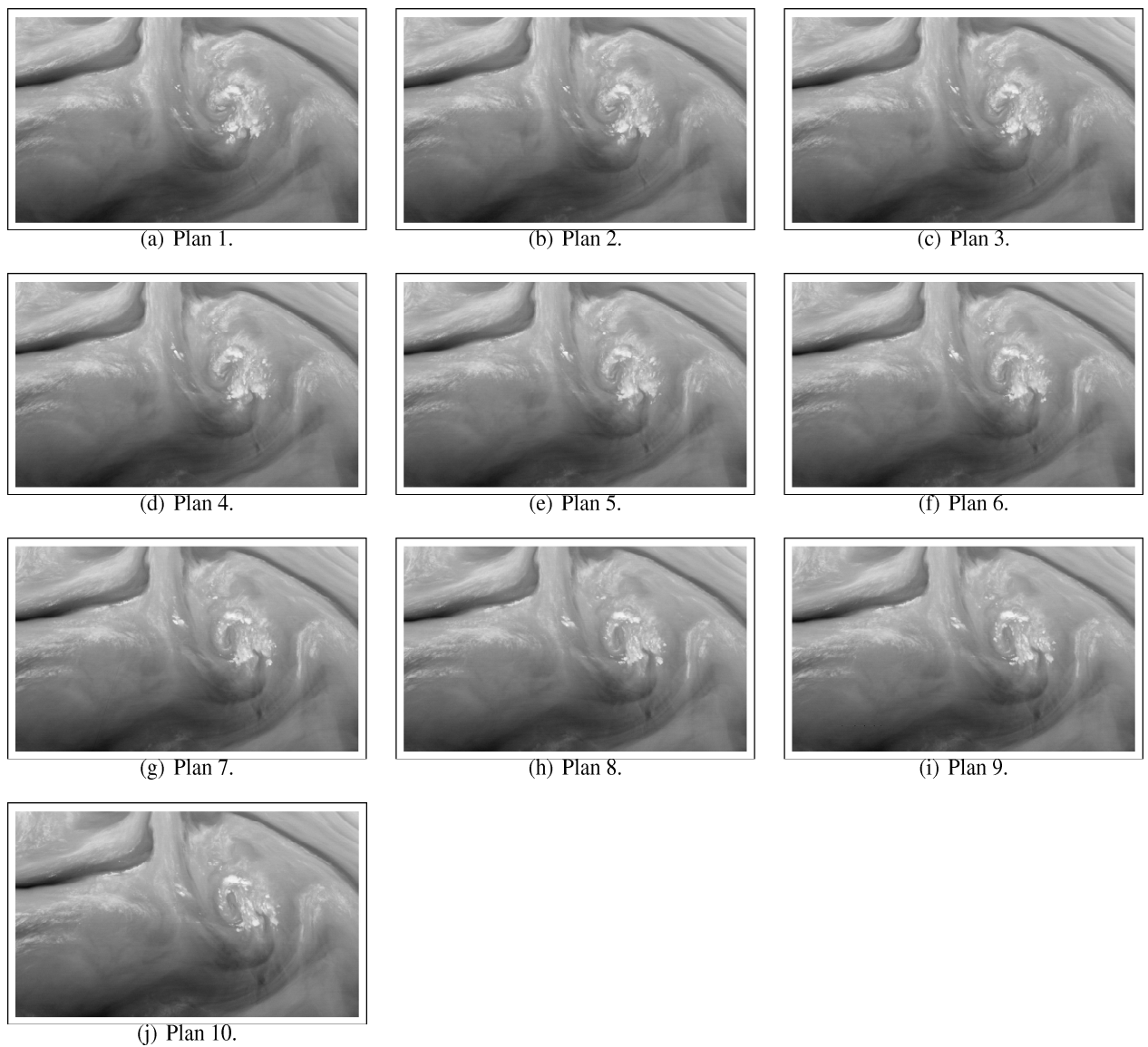


FIG. 9.15 – Séquence Météosat dans le canal vapeur d'eau.

9.2.0.5 Résultats du modèle PUSP

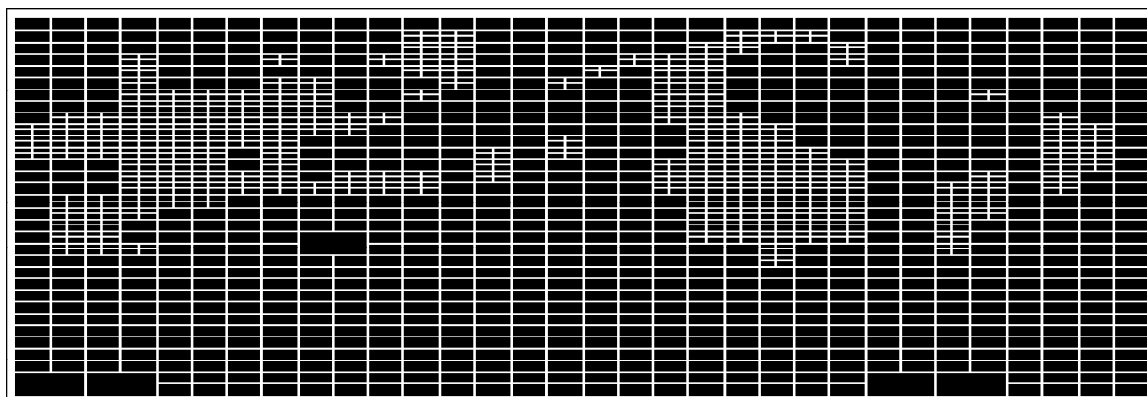
Le modèle **PUSP** (chapitre 6) est basé sur l'**ECM** et la contrainte de régularité **DR2O**, et utilise une décomposition spatiale du domaine image.

Le résultat de l'estimation par **PUSP** sur la séquence Météosat est présenté sur la figure 9.17. L'ensemble des points de contrôle sélectionnés et la décomposition *quadtree* associée sont illustrés respectivement sur les figures 9.16(a) et 9.16(b). Les paramètres utilisés pour le calcul du mouvement sont : $\lambda = 1$ et $\alpha = \beta = 0.5$.

En observant le champ estimé, on constate que le mouvement est plutôt bien retrouvé. Plus particulièrement, le vortex (centre droit) et la zone de mouvement divergent (en haut à gauche) sont correctement localisés et représentés. Le mouvement laminaire de certaines masses nuageuses, notamment celles situées sur le côté gauche, en dessous de la zone de mouvement divergent, est également retrouvé.



(a) 45 289 points de contrôle.

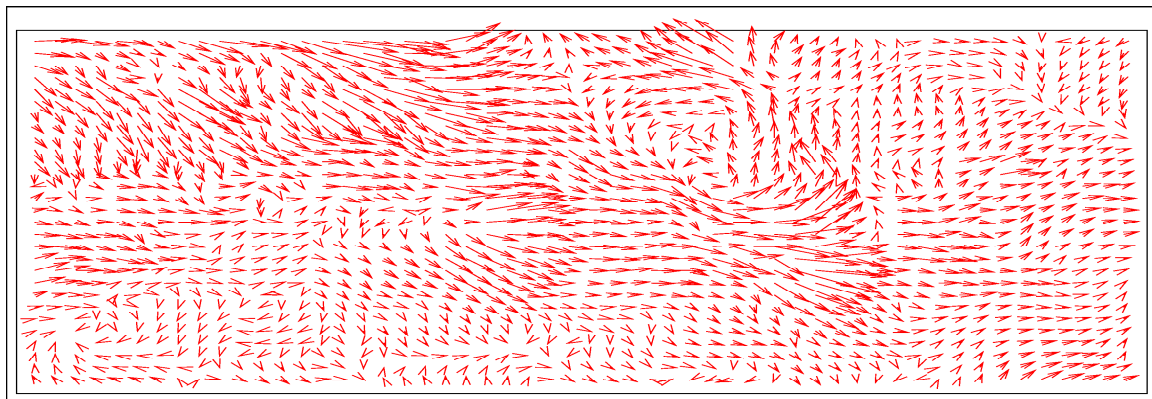


(b) Décomposition en *quadtree*.

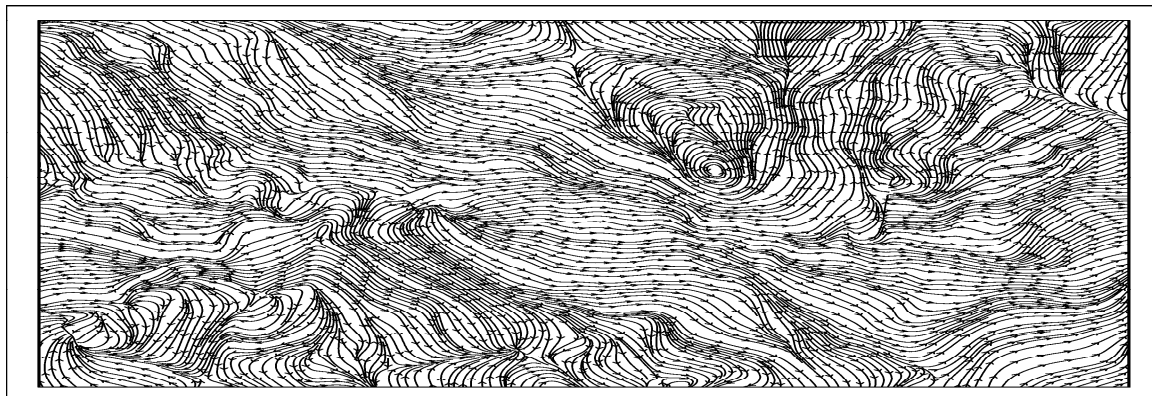
FIG. 9.16 – Ensemble des points de contrôle sélectionnés et décomposition *quadtree*. Chaque cellule ne contient pas plus de 120 points de contrôle.

9.2.0.6 Résultats du modèle GFME

Le modèle **GFME** (chapitre 8) permet une estimation multi-échelles du mouvement selon l'**ECM** et la contrainte de régularité **DR2O**.



(a) Champ estimé w_{PUSP} .



(b) Lignes de courant de w_{PUSP} .

FIG. 9.17 – Résultat de l'estimation du mouvement par le modèle **PUSP** basée sur l'**ECM** et contrainte de régularité **DR20**.

La figure 9.18 illustre le résultat de l'estimation sur deux niveaux de résolution par **GFME**, sur la séquence Météosat, dans le canal vapeur d'eau. Les paramètres utilisés sont : $\lambda = 1$, $\alpha = \beta = 0.5$ et $h = 10$.

Comme montré par Corpetti et Mémin [Corpetti, 2002], l'emploi de l'**ECM** sur les images infrarouges est empiriquement valide. Ainsi, nous présentons également des résultats d'après l'**ECM** et la contrainte de régularité **DR2O** sur deux séquences Météosat conjointes du canal infrarouge et vapeur d'eau (figures 9.19 et 9.20). Ces deux séquences comportent chacune 48 plans de 948×460 pixels. Les structures présentes sont caractéristiques du mouvement turbulent : plusieurs vortex, dont un à gauche qui se déplace rapidement vers le centre de l'image ; des petites structures nuageuses avec des «explosions convectives», notamment en bas au centre. Le modèle calcule le mouvement entre les plans 31 et 32, sur trois niveaux de résolution, avec les paramètres : $h = 40$, $\lambda = 40$, $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.1$, $\sigma_1 = 0.01$ et $\sigma_2 = 0.3$.

Les résultats de la figure 9.18 montrent que le mouvement semble plutôt convenablement estimé : les structures principales comme le vortex (au centre droit) et la zone de mouvement divergent (en haut à gauche) sont retrouvées, ainsi que les zones de mouvement laminaire. Le champ est «lisse» et l'utilisation de l'**ECM** montre que le modèle prend en compte les déformations spatiales liées à la divergence.

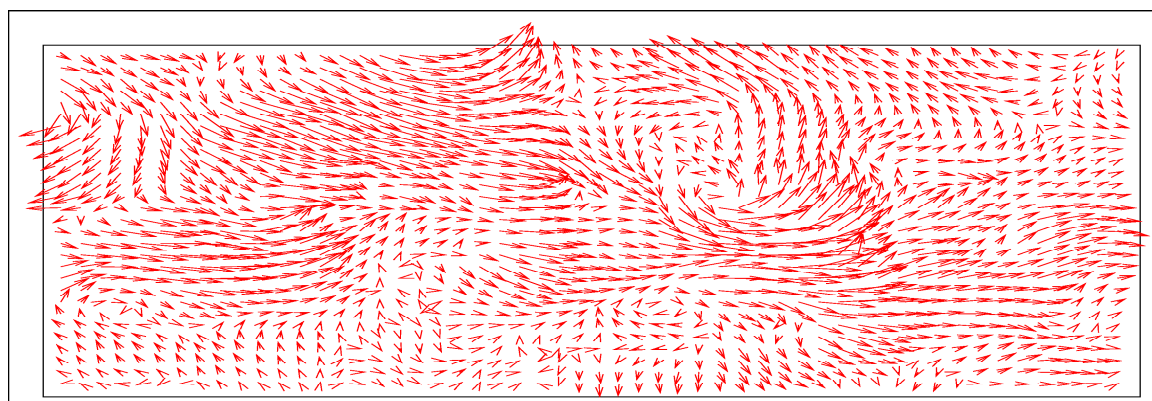
Les résultats obtenus à partir des séquences Météosat infrarouge et vapeur d'eau (figures 9.19 et 9.20) montrent que **GFME** est capable d'estimer le mouvement sur des grandes images. La valeur du paramètre d'échelle utilisé est grande : $h = 40$. Les deux champs de vecteurs estimés, un sur la séquence infrarouge et l'autre sur la séquence vapeur d'eau, sont assez similaires : le mouvement du vortex est correctement localisé, et le mouvement laminaire des structures semble bien estimé. Les plus petites structures, telles les explosions convectives, ne sont pas visualisées ici du fait du grand paramètre d'échelle utilisé. Notons que les «bons» résultats obtenus par **GFME** sur la séquence infrarouge vont dans le sens des justifications empiriques existantes, préconisant l'emploi de l'**ECM** sur ce type d'images.

Enfin, l'observation conjointe des résultats de **PUSP** (figure 9.17) et **GFME** (figure 9.18) montre que les champs estimés sont assez similaires : même localisation des tourbillons et des zones laminaires. En revanche, **GFME** semble davantage prendre en compte les zones de mouvement divergent que le modèle **PUSP**. C'est notamment le cas de l'estimation sur le bord en haut à gauche des images, où **GFME** modélise nettement mieux le mouvement.

9.3 Conclusion

Nous avons présenté les résultats obtenus par les modèles sur des données simulées, comparables à des images océanographiques, et sur des séquences d'images météorologiques. Sur les données simulées, les résultats sont qualitativement, excepté pour l'erreur en divergence, et quantitativement meilleurs que ceux de Horn et Schunck, utilisant la contrainte de régularité en norme L_2 . Ce constat souligne l'importance d'une contrainte de régularité adaptée au type de mouvement que l'on cherche à estimer. Sur les données météorologiques, les champs de mouvement estimés semblent correspondre au mouvement observé, et les structures turbulentes comme les tourbillons sont bien localisées.

Dès lors, on peut se poser la question de savoir quel modèle choisir pour l'estimation du mouvement des fluides géophysiques. La réponse à cette question est qu'il n'existe pas de modèle

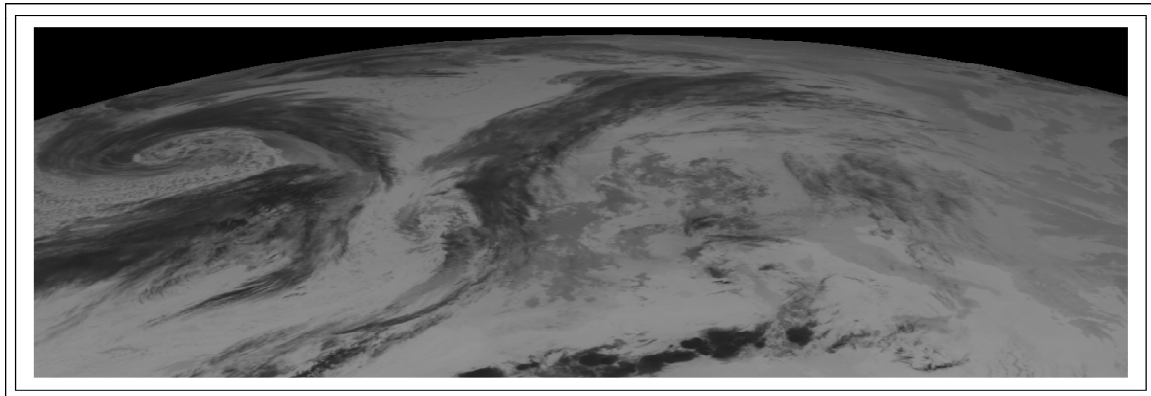


(a) Champ estimé w_{GFME} .

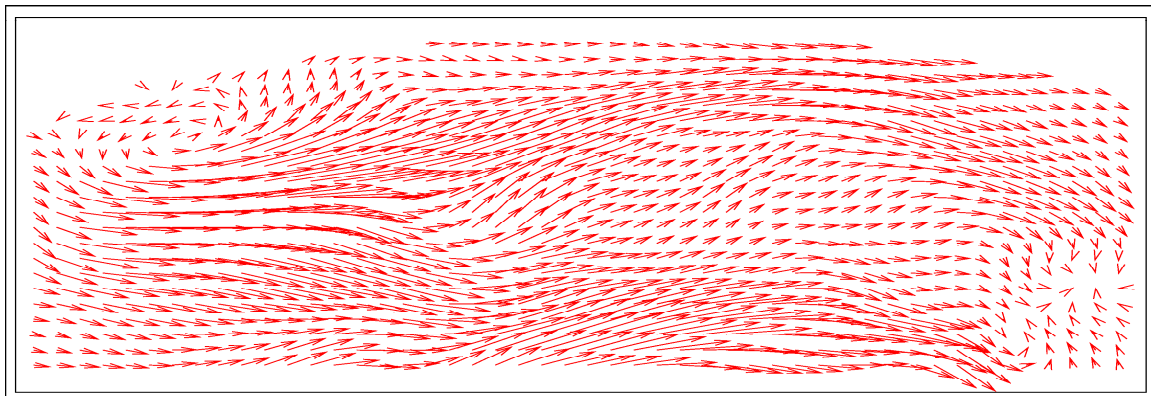


(b) Lignes de courant de w_{GFME} .

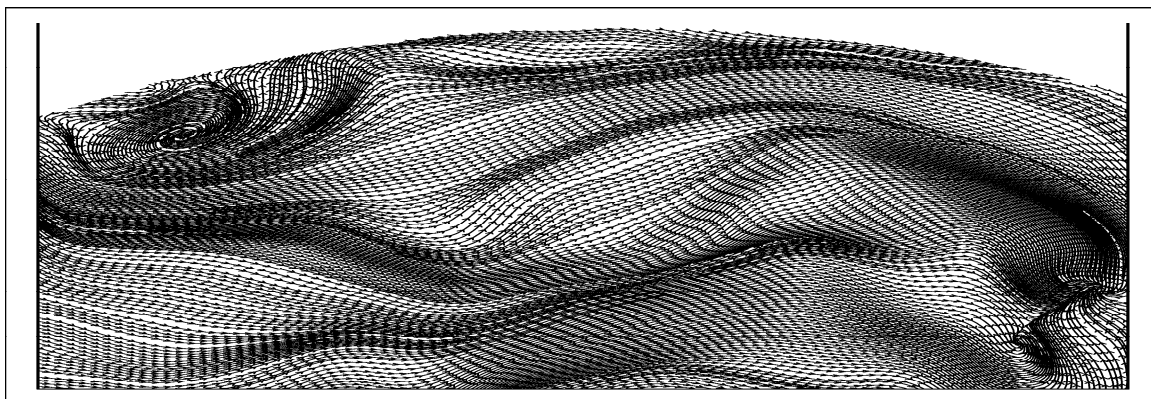
FIG. 9.18 – Résultat de l'estimation des vitesses par **GFME** sur la séquence Météosat dans le canal vapeur d'eau.



(a) Image de la séquence (plan 39).



(b) Champ estimé.



(c) Lignes de courant.

FIG. 9.19 – Estimation du mouvement par **GFME**. Exemple de résultat sur une séquence d'images infrarouge de la zone atlantique nord (Source : Laboratoire de Météorologie Dynamique du CNRS).

9.3. Conclusion

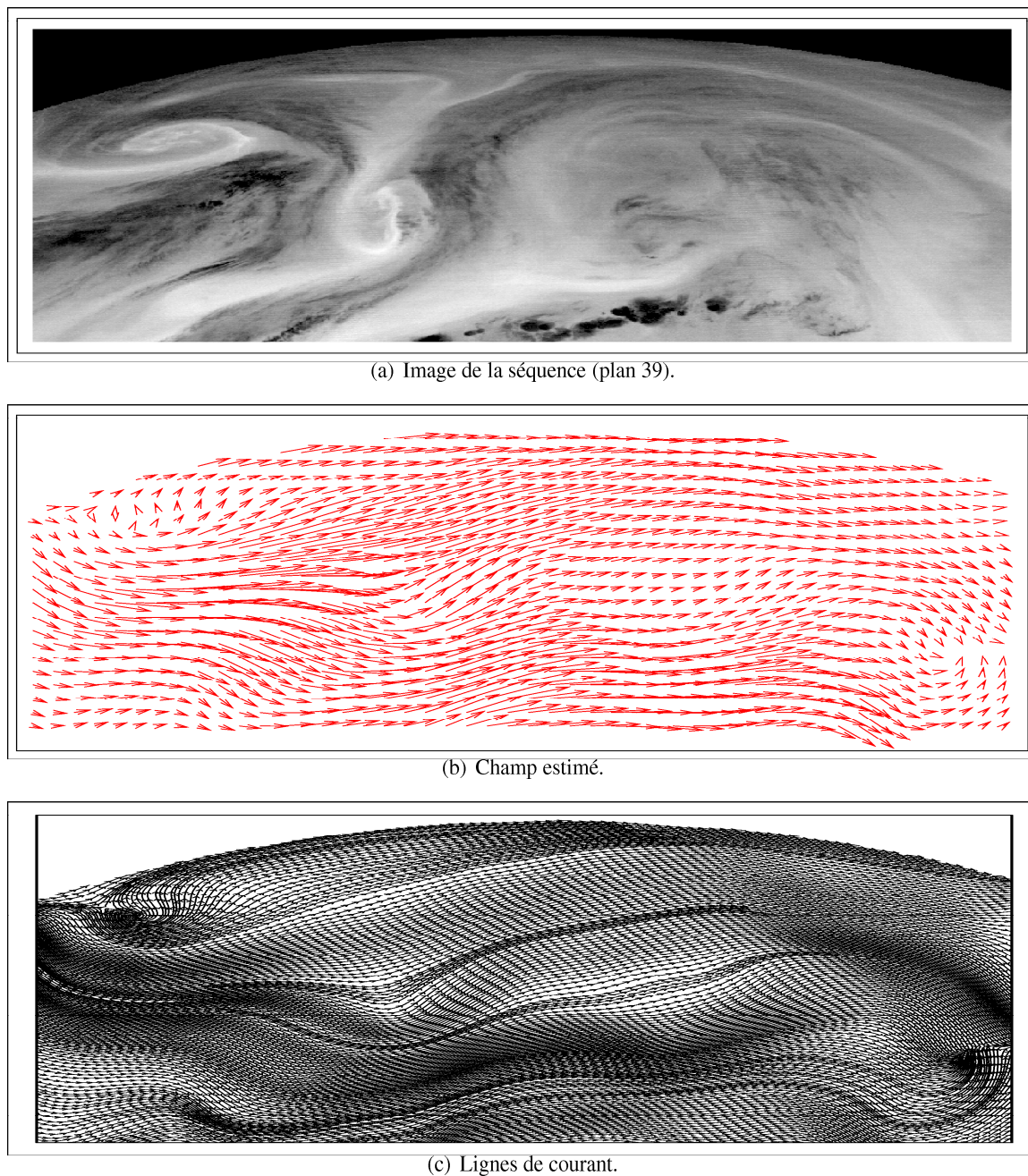


FIG. 9.20 – Estimation du mouvement par le modèle **GFME**. Exemple de résultat sur une séquence d'images dans le canal vapeur d'eau de la zone atlantique nord (Source : Laboratoire de Météorologie Dynamique du CNRS).

«universel» adapté à toutes les applications. A l'heure actuelle, nous ne disposons pas des moyens nécessaires pour valider les résultats autrement que qualitativement sur les données météorologiques. Le modèle **PUSP** offre une amélioration numérique. En outre, la solution correspond approximativement au minimum de la contrainte de régularité **DR2O** sur tout le domaine image. Le modèle **AMSV**, limité à l'emploi de l'**ECL**, permet de faire une estimation multi-échelles du mouvement à partir de sous-ensembles de l'ensemble original des points de contrôle. La fonction mère employée est issue du quasi-interpolant vérifiant la contrainte de régularité **DR2O**. La solution du modèle **GFME** n'est pas le minimum de la contrainte de régularité **DR2O** mais permet d'obtenir des champs de vecteurs «lisses», réguliers en divergence et en vorticité, en un temps de calcul moindre. De tous les modèles, **GFME** paraît être le plus attractif pour des applications opérationnelles. Quantitativement, il donne les meilleurs résultats sur la séquence obtenue par simulation du modèle **OPA**.

Chapitre 10

Conclusion

Dans cette étude, nous avons présenté plusieurs modèles d'estimation du mouvement des fluides géophysiques observés sur les images satellite, océanographiques ou météorologiques. Cette estimation repose sur une hypothèse de conservation du niveau de gris des pixels au cours du temps, et sur une contrainte de régularité pour pallier au problème d'ouverture. Dans le cas des fluides incompressibles, application océanographique, nous avons supposé que l'équation de conservation de la luminance, très utilisée en traitement d'image, est bien adaptée. Elle correspond à un transport à divergence nulle et sans diffusion sous certaines conditions (on néglige les termes de source et de puits). Dans le cas des fluides compressibles, application météorologique, la divergence n'est pas nulle. Nous avons donc utilisé l'équation de conservation de la masse. Cette équation est issue de la mécanique des fluides et permet de prendre en compte la déformation spatiale des structures au cours du temps. Il a été prouvé que son utilisation est adaptée sur les images météorologiques des canaux infrarouge et vapeur d'eau.

En pratique, l'équation de conservation n'est généralement pas valide sur tout le domaine image. En effet, certaines zones peu contrastées ne permettent pas d'exploiter l'information, et dans d'autres endroits de l'image le mouvement a une configuration spécifique, perpendiculaire au gradient spatial, qui empêche son estimation. Nous avons ainsi fait le choix de formuler les modèles dans un cadre de spline vectorielle, car cette approche permet de baser l'estimation du mouvement uniquement sur les zones de l'image où l'équation de conservation est valide. Sur le reste du domaine image, le mouvement est «approximé» par une fonctions spline vectorielle vérifiant une régularité choisie pour contrôler la divergence et la vorticité du champ de vecteurs estimés.

Afin de prendre en compte les structures spatiales liées à la turbulence dans les images, nous avons proposé des modèles d'estimation multi-échelles du mouvement apparent. Les tourbillons, de tailles variées, sont visualisés à partir de modèles définis à partir d'une fonction mère à support compact. La taille du support de la fonction mère est choisie en fonction de l'échelle spatiale à laquelle on souhaite estimer le mouvement.

Dans les sections suivantes, nous synthétisons les travaux effectués et les perspectives d'amélioration des modèles proposés dans cette thèse.

10.1 Travaux effectués

Le premier modèle, que nous avons formulé (chapitre 6), **PUSP** (Partition de l'Unité et Splines Vectorielles), estime le mouvement suivant la contrainte de régularité Div-Rot du second ordre et l'équation de conservation de la luminance ou de la masse, selon la nature du mouvement analysé. Ce modèle étend le modèle de Suter [Suter, 1994] et inclut l'étude des fluides compressibles. En outre, **PUSP** propose un cadre numérique pour l'estimation du mouvement à partir d'un grand nombre de points de contrôle, grâce à une décomposition spatiale de l'espace image.

Le second modèle (chapitre 7), **AMSV** (Approximation Multi-échelles et Splines Vectorielles), utilise une approche multi-échelles tout en gardant un contrôle sur les variations en divergence et en vorticité du champ de vitesse. Cette approche permet au modèle de prendre explicitement en compte les échelles spatiales variées et liées à la turbulence dans les images. La fonction mère du modèle est à support compact et est obtenue par le produit d'une fonction de base radiale à support compact avec la fonction mère du quasi-interpolant défini par Amodèi [Amodèi et Benbourhim, 1994]. Ainsi, la régularité du champ obtenue par le modèle **AMSV** est «très proche» de celle qui serait obtenue par des fonctions vérifiant exactement la contrainte de régularité Div-Rot du second ordre. Le modèle estime alors le mouvement apparent à des échelles variées, à partir de sous-ensembles de points de contrôle de l'image, sur lesquels l'équation de conservation de la luminance est valide. Ces sous-ensembles sont définis par un algorithme de décimation [Floater et Iske, 1996; Iske, 2004], qui effectue un sous-échantillonnage de l'ensemble original des points de contrôle. L'algorithme enlève, de manière itérative, un point de contrôle en fonction d'un critère géométrique. Il génère ainsi des sous-ensembles, pour lesquels la répartition spatiale des points est conforme à celle des points de l'ensemble original. L'implémentation par arbre binaire de l'algorithme est en $O(n \log n)$, n étant le nombre initial de points de contrôle. La taille du support des fonctions de base du modèle dépend du sous-ensemble considéré : elle est grande si les points sont espacés, et inversement. La fonction mère du modèle **AMSV** et l'algorithme de décimation permettent de formuler une stratégie pour effectuer une représentation multi-échelles du champ de vecteurs calculé à pleine résolution, afin de mieux en comprendre la structure.

Enfin, dans un troisième temps (chapitre 8), nous avons proposé la formulation d'un modèle, noté **GFME**, dédié à l'estimation multi-échelles du mouvement de fluides géophysiques sur des images satellite de très grande taille. Ce modèle permet une estimation rapide du mouvement à partir d'un grand nombre de points de contrôle, grâce à une fonction mère à support compact et à une discrétisation moins coûteuse en temps de calcul que celle employée dans le modèle **AMSV**. Le champ de vecteurs obtenu par **GFME** minimise une énergie, somme de deux fonctionnelles : contrainte de régularité Div-Rot du second ordre et terme d'attache aux données, qui peut être l'équation de conservation de la luminance (pour des mesures de Température de Surface de l'océan) ou l'équation de conservation de la masse (pour des mesures relatives à l'intégrale verticale d'une densité comme c'est le cas des images du canal vapeur d'eau des satellites météorologiques). Là encore, la solution ne vérifie pas le minimum exact de la contrainte de régularité Div-Rot du second ordre mais ce «désavantage» est largement compensé par les performances du modèle en terme de qualité d'approximation et de temps de calcul. Contrairement à **AMSV**, le modèle **GFME** est multi-résolutions et se rapproche de l'analyse par ondelettes. En outre, cette formulation permet d'estimer le champ de vitesse en décomposant le processus d'estimation du mouvement en incréments, c'est-à-dire une somme

10.2. Perspectives

du mouvement à basse échelle, «grossier», et d'incrémentes contenant les «détails».

Les applications sont multiples. La vitesse fait partie des variables d'état des modèles de prévision météorologique et océanographique. On peut donc améliorer la prévision, soit en initialisant les vecteurs d'états par les estimations des modèles développés dans cette thèse, soit en considérant les estimations du mouvement comme des observations des vecteurs d'états que l'on assimile.

Dans la section suivante, nous détaillons les points qu'il semble important de développer dans le futur, pour obtenir un modèle qui permette une «bonne» modélisation du mouvement fluide.

10.2 Perspectives

10.2.1 Améliorations «numériques» possibles des modèles présentés

- **Modèle PUSP** : le modèle emploie une fonction mère, qui est une dérivée de la fonction spline «plaque-mince», ainsi qu'une résolution numérique qui partitionne l'espace image en sous-domaines qui s'intersectent. Dans chaque sous-domaine, la solution du modèle n'est valide que si l'ensemble des points de contrôle choisi pour l'approximation est unisolvant (c'est-à-dire si les points de contrôle ne sont pas colinéaires). Cette condition peut ne pas être vérifiée. Néanmoins, ce cas n'apparaît pas en pratique, si le nombre de points dans un sous-domaine est raisonnablement élevé. En outre, il est facile de mettre en place une stratégie pour que cela ne se produise pas. Par exemple, si les points dans un sous-domaine sont colinéaires alors on augmente la taille du sous-domaine jusqu'à ce que l'ensemble des points de contrôle soit unisolvant.

La qualité de l'approximation varie sur les différentes zones de l'image. Le modèle utilise une fonction mère, qui tend vers l'infini lorsque les points de contrôle sont loins du point où l'on évalue la spline. De ce fait, s'il y a beaucoup de points de contrôle proches du point où l'on évalue la spline (zones de fort gradient), l'approximation est «bonne». A l'inverse, si peu ou pas de points de contrôle sont sélectionnés proches du point où l'on calcule la solution, le champ de vitesse est alors principalement déterminé par l'approximation vectorielle contrainte par la régularité Div-Rot du second ordre, et pas nécessairement bien estimé.

Remarquons qu'il serait possible de définir le modèle **PUSP** dans un cadre multi-échelles, comme par exemple celui du modèle **AMSV**. Puisque le modèle **PUSP** repose sur un ensemble de points de contrôle, nous pourrions envisager, à chaque échelle, d'estimer le mouvement à partir d'un sous-ensemble décimé de l'ensemble des points de contrôle original. Cependant, cette approche ne semble pas optimale : si les points de contrôle sont en petit nombre, ils risquent d'être colinéaires dans les sous-domaines générés par une décomposition *quadtree*. A cet effet, il serait intéressant d'étudier quels types de répartition spatiale des points de contrôle permettent les «meilleurs» résultats et la meilleure approximation.

- **Modèle AMSV** : les performances du modèle **AMSV** sont intrinsèquement limitées par la fonction mère employée. Le quasi-interpolant vectoriel défini par Amodei permet de formuler le problème spline d'interpolation suivant la contrainte de régularité Div-Rot du

second ordre avec une fonction mère, translatée et dilatée sur une grille régulière de pas h . La fonction interpole exactement les polynômes de degré au plus 1. Cependant, d'une part la fonction mère n'est pas de décroissance suffisamment rapide lorsque $\|x\| \rightarrow \infty$, et d'autre part sa définition fait intervenir des dérivées d'ordre élevé calculées par des masques de différences finies, ce qui nécessite un nombre d'opérations important pour une évaluation de la spline. Ces deux points ne permettent pas la formulation d'un modèle efficient pour approximer un très grand nombre de données. Par ailleurs, la fonction mère est issue d'une discrétisation à l'ordre 4. Or, l'utilisation de l'équation de conservation de la masse pour l'estimation du mouvement nécessite d'appliquer un opérateur différentiel à cette fonction mère, ce qui peut s'avérer délicat.

L'approche par décimation des points de contrôle semble celle qui ouvre sur le plus de perspectives : les points sont décimés par un critère géométrique, mais il serait tout à fait possible de considérer d'autres critères de décimation afin d'estimer des champs de vitesse à différentes échelles pour, par exemple, retrouver les tourbillons de tailles variées dans les images.

- **Modèle GFME** : bien que la solution de ce modèle ne vérifie pas le minimum exact de la contrainte de régularité Div-Rot du second ordre, **GFME** semble être le modèle offrant le plus d'avantages pour une application opérationnelle. Le désavantage principal se manifeste sur les données Météosat dans le canal vapeur d'eau. Il est fréquent d'y voir des structures appelées «explosions convectives» résultant de phénomènes de transports verticaux non visibles sur les images. L'approche multi-résolutions employée par **GFME** permet d'estimer les mouvements à différentes échelles, mais le filtrage des images par une gaussienne peut avoir tendance à «gommer» les structures d'explosion convective aux basses échelles, car elles sont souvent de petite taille. La bonne visualisation de ces dernières aux fines échelles est alors compromise, car elle dépend des estimations de mouvement faites aux basses échelles.

Sur les images de mouvement fluide compressible, une autre amélioration serait d'estimer le mouvement aux grandes échelles suivant l'équation de conservation de la luminance et aux plus petites échelles suivant l'équation de conservation de la masse. Des résultats préliminaires, non présentés, appuient l'idée que cette stratégie donnerait de meilleurs résultats.

10.2.2 Autres améliorations possibles

- **Approche multi-échelles spatio-temporelle** : le mouvement turbulent crée des structures de tailles variées en espace et en temps, par exemple, les tourbillons. Ceux-ci ont une «durée de vie» qui dépend de leur taille. Ce constat se vérifie sur la séquence **OPA** : les petits tourbillons durent à peine quelques images et ont un mouvement rapide, tandis que les gros tourbillons durent sur presque toute la séquence et sont assez stables dans l'espace : ils se déplacent peu et leur vitesse de rotation est lente. Nous pourrions envisager une régularisation temporelle inspirée de celle proposée dans un cadre variationnel par Ruhnau *et al.* [Ruhnau *et al.*, 2006], pour l'estimation du mouvement fluide : cela pénalise les variations de la vorticité d'une image sur l'autre. La régularisation temporelle serait adaptative, de telle sorte que les variations en vorticité des gros tourbillons soient pénalisées mais pas celles des plus petits.
- **Discrétisation «physique»** : Nous pourrions utiliser des masques qui «imitent» les iden-

10.2. Perspectives

tités différentielles et intégrales satisfaites par les opérateurs de divergence, de rotationnel et du laplacien [Castillo *et al.*, 1995]. Ces masques permettraient de vérifier les versions discrètes des équations de conservation de la masse et de la luminance, et ainsi d’obtenir des résultats plus «physiques». En outre, les modèles **AMSV** et **GFME** font intervenir des dérivées d’ordre élevé, calculés par des masques de différences finies. Une méthode possible serait d’utiliser des techniques de différentiation basée sur ces masques, ce qui permettrait de diminuer le nombre de points à évaluer dans la discrétisation et réduirait considérablement le temps de calcul de la solution [Hyman *et al.*, 1992; Fornberg et Sloan, 1994].

- **Validations supplémentaires** : nous envisageons de faire une étape de validation plus approfondie des résultats obtenus. Plus particulièrement, dans le cas d’images météorologiques, nous ne pouvons effectuer de validation numérique car les données de référence manquent. Dans le futur, nous espérons être en mesure de collaborer avec des météorologues et des océanographes pour obtenir ces références, par exemple issues de bouées et/ou de ballons sondes.

Annexes

A.1 Fonctions polyharmoniques : calcul d'une solution fondamentale

Toute équation différentielle $P\mathbf{w} = f$ dans \mathbb{R}^n , avec $P = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(\mathbf{x})\partial^{\alpha}$, peut s'écrire sous la forme d'une équation de convolution :

$$A * \mathbf{w} = f, \quad A = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(\mathbf{x})\partial^{\alpha}\delta_0$$

où δ_0 est la distribution de Dirac à l'origine de \mathbb{R}^n . La distribution A est à support compact, ce qui permet de faire un produit de convolution avec toute distribution sur \mathbb{R}^n ou toute fonction C^{∞} sur \mathbb{R}^n (auquel cas on obtient une fonction C^{∞}).

Définition : Soit A une distribution à support compact sur \mathbb{R}^n . Une distribution E sur \mathbb{R}^n est une solution fondamentale de A si $A * E = \delta_0$.

Théorème : Soit $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, admettant une solution fondamentale E . Alors,

1. Pour tout $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, il existe au moins une solution $\mathbf{w} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ de l'équation $A * \mathbf{w} = f$, à savoir $E * f$.
2. Pour tout $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, il existe au plus une solution $\mathbf{w} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ de l'équation $A * \mathbf{w} = f$ et, si elle existe, c'est $E * f$.

A.2 Expression formelle du quasi-interpolant vectoriel vérifiant la contrainte de régularité DR2O

Nous dérivons l'expression formelle de la fonction mère du quasi-interpolant vérifiant la contrainte de régularité **DR2O**. Cette fonction mère est utilisée dans le modèle **AMSV** et est obtenue par une discrétisation de :

$$Q(D)FQ(D) \tag{A.1}$$

Avec :

$$Q(D) = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{xy} & Q_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha}\partial_{xx} + \sqrt{\beta}\partial_{yy} & (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})\partial_{xy} \\ (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})\partial_{xy} & \sqrt{\alpha}\partial_{yy} + \sqrt{\beta}\partial_{xx} \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

une matrice qui dépend d'opérateurs différentiels, et :

$$F = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha}\phi_{xx} + \frac{1}{\beta}\phi_{yy} & \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)\phi_{xy} \\ \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)\phi_{xy} & \frac{1}{\alpha}\phi_{yy} + \frac{1}{\beta}\phi_{xx} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

la solution fondamentale du problème splines vérifiant la contrainte de régularité **DR20**. La fonction ϕ est la fonction spline « plaque-mince » :

$$\phi(\|\mathbf{x}\|) = \theta\|\mathbf{x}\|^4 \log(\|\mathbf{x}\|), \quad (\text{A.4})$$

avec θ constante. En développant l'équation (A.1), on trouve :

$$Q(D)FQ(D) = \begin{pmatrix} Q_{xx}Q_{xx}F_{xx} + 2Q_{xx}Q_{xy}F_{xy} + Q_{xy}Q_{xy}F_{yy} & Q_{xx}Q_{xy}F_{xx} + (Q_{xx}Q_{yy} + Q_{xy}Q_{xy})F_{xy} + Q_{xy}Q_{yy}F_{yy} \\ Q_{xx}Q_{xy}F_{xx} + (Q_{xx}Q_{yy} + Q_{xy}Q_{xy})F_{xy} + Q_{xy}Q_{yy}F_{yy} & Q_{xy}Q_{xy}F_{xx} + 2Q_{xy}Q_{yy}F_{xy} + Q_{yy}Q_{yy}F_{yy} \end{pmatrix}$$

En utilisant la notation \bar{Q}_{xx} pour l'opérateur Q_{xx} discrétisé de pas h , on a :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{xx}\bar{Q}_{yx} &= (\alpha - \sqrt{\alpha\beta})\bar{\partial}_{xxx}^4 + (\sqrt{\alpha\beta} - \beta)\bar{\partial}_{xyy}^4 \\ \bar{Q}_{xx}\bar{Q}_{yy} &= (\alpha + \beta)\bar{\partial}_{xxy}^4 + 2\sqrt{\alpha\beta}(\bar{\partial}_{xxx}^4 + \bar{\partial}_{yyy}^4) \\ \bar{Q}_{xy}\bar{Q}_{xy} &= (\alpha + \beta - \sqrt{\alpha\beta})\bar{\partial}_{xxy}^4 \\ \bar{Q}_{xy}\bar{Q}_{yy} &= (\alpha - \sqrt{\alpha\beta})\bar{\partial}_{xyy}^4 + (\sqrt{\alpha\beta} - \beta)\bar{\partial}_{xxx}^4 \\ \bar{Q}_{xx}\bar{Q}_{xx} &= \alpha\bar{\partial}_{xxx}^4 + \beta\bar{\partial}_{yyy}^4 + 2\sqrt{\alpha\beta}\bar{\partial}_{xxy}^4 \\ \bar{Q}_{yy}\bar{Q}_{yy} &= \alpha\bar{\partial}_{yyy}^4 + \beta\bar{\partial}_{xxx}^4 + 2\sqrt{\alpha\beta}\bar{\partial}_{xxy}^4 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Les dérivées discrètes $\bar{\partial}$ sont obtenues par itération du masque centré de différences finies de pas h :

$$\bar{\partial}_{h,j} = \frac{1}{h} \left(\delta + \frac{h}{2}e_j - \delta - \frac{h}{2}e_j \right), \quad (\text{A.6})$$

où $e_{j=1,2}$ sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^2 . Les expressions des fonctions de base du quasi-interpolant, vérifiant la contrainte de régularité **DR20**, sont :

$$\Psi_h = \bar{Q}_h(D)F\bar{Q}_h(D) = \begin{pmatrix} \Psi_{h,xx} & \Psi_{h,xy} \\ \Psi_{h,xy} & \Psi_{h,yy} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

A.2. Expression formelle du quasi-interpolant vectoriel vérifiant la contrainte de régularité DR2O

Avec :

$$\begin{aligned}
\Psi_{h,xx} &= h^2 \left((\alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta}) \bar{\partial}_{xxyy}^4 F_{yy} + 2 \left((\alpha - \sqrt{\alpha\beta}) \bar{\partial}_{xxxy}^4 F_{xy} + (\sqrt{\alpha\beta} - \beta) \bar{\partial}_{xyyy}^4 F_{xy} \right) + \right. \\
&\quad \left. \alpha \bar{\partial}_{xxxx}^4 F_{xx} + \beta \bar{\partial}_{yyyy}^4 F_{xx} + 2\sqrt{\alpha\beta} \bar{\partial}_{xxyy}^4 F_{xx} \right) \\
\Psi_{h,xy} &= h^2 \left((\alpha - \sqrt{\alpha\beta}) \left(\bar{\partial}_{xxxy}^4 F_{xx} + \bar{\partial}_{xyyy}^4 F_{yy} \right) + \right. \\
&\quad \left(\sqrt{\alpha\beta} - \beta \right) \left(\bar{\partial}_{xyyy}^4 F_{xx} + \bar{\partial}_{xxxy}^4 F_{yy} \right) + \\
&\quad 2 \left(\alpha + \beta - \sqrt{\alpha\beta} \right) \bar{\partial}_{xyyy}^4 F_{xy} + \\
&\quad \left. 2\sqrt{\alpha\beta} \left(\bar{\partial}_{xxxx}^4 F_{xy} + \bar{\partial}_{yyyy}^4 F_{xy} \right) \right) \\
\Psi_{h,yy} &= h^2 \left((\alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta}) \bar{\partial}_{xxyy}^4 F_{xx} + 2 \left((\alpha - \sqrt{\alpha\beta}) \bar{\partial}_{xyyy}^4 F_{xy} + (\sqrt{\alpha\beta} - \beta) \bar{\partial}_{xxxy}^4 F_{xy} \right) + \right. \\
&\quad \left. \alpha \bar{\partial}_{yyyy}^4 F_{xx} + \beta \bar{\partial}_{xxxx}^4 F_{yy} + 2\sqrt{\alpha\beta} \bar{\partial}_{xxyy}^4 F_{yy} \right)
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Liste des publications

Voici la liste des publications relatives à mon travail de thèse, classées par ordre chronologique :

- T. Isambert, J.-P. Berroir, I. Herlin, E. Huot and D. Béréziat.
A Multi-scale Vector Spline Algorithm For Estimating The Apparent Motion Of Turbulent Flow.
In *PAMI (IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence)*, Soumis.
- T. Isambert, I. Herlin and J.-P. Berroir.
Fast and Stable Vector Spline Method For Fluid Flow Estimation.
In *Proceedings of ICIP (IEEE International Conference on Image Processing)*, San Antonio, Texas, USA, September 16-19, 2007.
- E. Huot, T. Isambert, I. Herlin, J.-P. Berroir, and G. Korotaev.
Data Assimilation of Satellite Images within an Oceanographic Circulation Model.
In *Proceedings of ICASSP (International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing)*, Toulouse, France, May, 14-19 2006.
- E. Huot, I. Herlin, T. Isambert, and G. Korotaev.
Assimilation de données images dans un modèle de circulation océanographique.
In *Proceedings of RFIA (Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle)*, Tours, France, January, 25-27 2006.
- T. Isambert, I. Herlin, J.-P. Berroir, and C. Graffigne.
Vers une représentation multi-échelles du mouvement fluide turbulent observé sur des images satellitaires.
In *Traitement et Analyse de l'Information : Méthodes et Applications, TAIMA*, Hammamet, Tunisie, September, 26 - October, 1 2005.
- T. Isambert, J.P. Berroir, I. Herlin, and E. Huot.
Apparent motion estimation for turbulent flows with vector spline interpolation.
In *XVII IMACS world congress, Scientific Computation Applied Mathematics and Simulation*, Paris, July, 11-15 2005.
- T. Isambert, I. Herlin, J.-P. Berroir, and E. Huot.
Estimation du mouvement fluide apparent dans un cadre de splines vectorielles.
In *ORASIS*, Fournol, France, May, 23-26 2005.

Bibliographie

- ADELSON, E. H. et BERGEN, J. R. (1985). Spatiotemporal energy models for the perception of motion. *Journal of the Optical Society of America*, A(2) : 284–321.
- AMINI, A. (1994). A scalar function formulation for optical flow. In *ECCV94*, pages 125–131.
- AMODEI, L. (1991). A vector spline approximation. *Journal of approximation theory*, 67 : 51–79.
- AMODEI, L. (1993). *Étude d’une classe de fonctions splines vectorielles en vue de l’approximation d’un champ de vitesse. Application à la météorologie*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier.
- AMODEI, L. et BENBOURHIM, M. N. (1991). A vector spline approximation with application to meteorology. *Curves and surfaces*, pages 5–10.
- AMODEI, L. et BENBOURHIM, M. N. (1994). A vector spline quasi-interpolation. In *An international conference on curves and surfaces on Wavelets, images, and surface fitting*, pages 1–10, Fair Oaks, CA, USA. Adams-Blake Publishing.
- ANANDAN, P. (1989). A computational framework and an algorithm for the measurement of visual motion. *International Journal of Computer Vision*, 2 : 283–310.
- ARIGOVINDAN, M. (2005). *Variational Reconstruction of Vector and Scalar Images from Non-Uniform Samples*. EPFL thesis no. 3329 (2005), 172 p., Swiss Federal Institute of Technology Lausanne (EPFL).
- ARONSZAJN, N. (1950). Theory of reproducing kernels. *Transactions of the American Mathematical Society*, 68.
- ATTEIA, M. (1966). Existence et détermination des fonctions splines à plusieurs variables. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 262 : 575–578.
- ATTEIA, M. (1992). *Hilbertian Kernels and splines functions*. Studies in computational mathematics 4. North-Holland.
- BATCHELOR, G. (1967). *An Introduction to Fluid Mechanics*. Cambridge University Press.
- BEATSON, R. et LIGHT, W. (1992). Fast evaluation of radial basis functions: methods for two-dimensional polyharmonic splines. *Computational Mathematics and Applications*, 24(12) : 7–20.
- BEAUCHEMIN, S., FLEET, D. et BARRON, J. (1992). Performance of optical flow techniques. In *CVPR92*, pages 236–242.
- BEAUCHEMIN, S. S. et BARRON, J. L. (1995). The computation of optical flow. *ACM Computing Surveys*, 27(3) : 433–467.
- BÉRÉZIAT, D., YOUNES, L. et HERLIN, I. (1999). Motion estimation using a volume conservation hypothesis. In *International conference on Acoustic, Speech and Signal Processing (ICASSP99)*.

-
- BERNARD, C. (1996). *Ondelettes et Problèmes mal posés : la mesure du flot optique et l'interpolation irrégulière*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique.
- BERNARD, C. (1999). Fast optic flow computation with discrete wavelets.
- BLACK, M. et ANANDAN, P. (1991). Robust dynamic motion estimation over time. *In CVPR91*, pages 296–302.
- BLACK, M. J. (1992). *Robust incremental optical flow*. Thèse de doctorat, Yale University, Department of Computer Science, New Haven, CT, USA.
- BLACK, M. J. et JEPSON, A. D. (1996). Estimating optical flow in segmented images using variable-order parametric models with local deformations. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 18(10) : 972–986.
- BLAYO, E. (2002). *Modélisation numérique et assimilation de données en océanographie - Habilitation à Diriger des Recherches*.
- BLAYO, E. (2003-2004). *Notions de mécanique des fluides*. Notes de cours, DEA de mathématiques appliquées, Université Joseph Fourier - Grenoble 1.
- BOISSONNAT, J.-D. et YVINEC, M. (1998). *Algorithmic Geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- BUHMANN, M. D. (2001). A new class of radial basis functions with compact support. *Math. Comput.*, 70(233) : 307–318.
- BUHMANN, M. D. et ABLOWITZ, M. J. (2003). *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*. Cambridge University.
- CASTILLO, J., HYMAN, J. M., SHASHKOV, M. J. et STEINBERG, S. (1995). High-order mimetic finite difference methods on nonuniform grids. *In ILIN, A. et SCOTT, L. R., éditeurs : ICOSAHOM-95, Proc. of the Third International Conference on Spectral and High Order Methods, Houston, Texas, 5-9 June 1995*, pages 347–361. Special Issue of Houston Journal of Mathematics.
- CHEN, F. et SUTER, D. (1997). Fast evaluation of vector splines in two dimensions. *In Proc. 15th IMACS'97 World Conference on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics, Berlin.*, volume 1, pages 469–474.
- CHEN, F. et SUTER, D. (1998). Fast evaluation of vector splines in three dimensions. *Computing*, 61(3) : 189–213.
- CHEN, F. et SUTER, D. (1999). Div-curl vector quasi-interpolation on a finite domain. *Mathematical and Computer Modelling*, 30(2):179-204, 30(2) : 179–204.
- CHORIN, A. (1998). *Vorticity and Turbulence*. Springer.
- COHEN, I. (1993). Nonlinear variational method for optical flow computation. *In 8th Scandinavian Conference on Image Analysis, Tromso, Norway, June 1993. IAPR*, pages 523–530.
- COHEN, I. et HERLIN, I. (1996). Optical flow and phase portrait methods for environmental satellite image sequences. *In ECCV*, volume 2, page 141.
- COIRIER, J. (1997). *Mécanique des milieux continus*. Dunod.
- COOPER, D. J. (2003). Optical flow for validating medical image registration. *In 9th IASTED International Conference on Signal and Image Processing, Honolulu, Hawaii, USA*, pages 502–506.
- CORMEN, T., LEISERSON, C., RIVEST, R. et STEIN, C. (2002). *Introduction à l'algorithmique : Cours et exercices*. Dunod.
-

Bibliographie

- CORPETTI, T. (2002). *Estimation et analyse de champs denses de vitesses d'écoulements fluides*. Thèse de doctorat, Université de Rennes I.
- CORPETTI, T., MÉMIN, E. et PÉREZ, P. (2002). Dense estimation of fluid flows. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 24(3) : 365–380.
- CRAVEN, P. et WAHBA, G. (1979). Smoothing noisy data with spline functions: Estimating the correct degree of smoothing by the method of generalized cross-validation. *Numerische Mathematik*, 31 : 377–403.
- CRISTIANINI, N. et SHAWÉ-TAYLOR, J. (2000). *An Introduction to Support Vector Machines and Other Kernel-based Learning Methods*. Cambridge University Press.
- CUZOL, A., HELIER, P. et MÉMIN, E. (2007). A low dimensional fluid motion estimator. *Int. Journ. on Computer Vision*.
- de BOOR, C. et FIX, G. (1973). Spline approximation by quasi-interpolants. *J. Approx. Th.*, 8 : 19–45.
- DERICHE, R., KORNPORST, P. et AUBERT, G. (1995). Optical-flow estimation while preserving its discontinuities: A variational approach. In *ACCV*, pages 71–80.
- DIBOS, F., KOEPFLER, G. et MONASSE, P. (2003). *Total variation minimization: application to gray-scale, color images and optical flow regularization*. Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision and Graphics, Springer.
- DUAN, Q., ANGELINI, E. D., HERZ, S. L., INGRASSIA, C. M., GERARD, O., COSTA, K. D., HOLMES, J. W. et LAINE, A. F. (2005). Evaluation of optical flow algorithms for tracking endocardial surfaces on three-dimensional ultrasound data. In *Proceedings of the SPIE.*, volume 5750.
- DUCHON, J. (1975). Interpolation de fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces. *RAIRO Anal. Numér.*, 10 : 5–12.
- DUCHON, J. (1976). Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in sobolev spaces. *Constructive Theory of Functions of Several Variables*, pages 85–100.
- DYN, N., FLOATER, M. et ISKE, A. (2002a). Adaptive thinning for bivariate scattered data. *J. Comput. Applied Math.*, 145(2) : 505–517(13).
- DYN, N., FLOATER, M. S. et ISKE, A. (2002b). Adaptive thinning for bivariate scattered data. *J. Comput. Appl. Math.*, 145(2) : 505–517.
- FASSHAUER, G. (1999). Solving differential equations with radial basis functions: multilevel methods and smoothing.
- FAYOLLE, J. (1996). *Études d'algorithmes de traitement d'images pour l'analyse du mouvement d'objets déformables. Application à la mesure de vitesses d'écoulements*. Thèse de doctorat, Université de Saint-Étienne.
- FAYOLLE, J., FOURNEL, T. et GERVAIS, P. (2000). Comparison of piv parameter effects on displacement identification and cross-correlation. *Journal of visualization*, 3(3) : 253–265.
- FEI R., Gui L., M. W. (1999). Comparative study of correlation-based piv evaluation methods. *Machine, graphics & VISION*, 8(4) : 571–578.
- FITZPATRICK, J. (1988). The existence of geometrical density-image transformations corresponding to object motion. *CVGIP*, 44(2) : 155–174.
- FLEET, D. et JEPSON, A. (1990). Computation of component image velocity from local phase information. *International Journal of Computer Vision*, 5(1) : 77–104.

-
- FLOATER, M. S. et ISKE, A. (1996). Multistep scattered data interpolation using compactly supported radial basis functions. *J. Comput. Appl. Math.*, 73(1-2) : 65–78.
- FLYNN, K. (2001). A mechanistic model for describing dynamic multi-nutrient, light, temperature interactions in phytoplankton. *Journal of Plankton Research*, 23 : 977–997.
- FORNBERG, B. et SLOAN, C. (1994). A review of pseudospectral methods for solving partial differential equations. *Acta Numerica*, 3 : 203–267.
- FRANKE, R. (1977). Locally determined smooth interpolation at irregularly spaced points in several variables. *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, 19(4) : 471–482.
- FRANKE, R. (1982). Smooth interpolation of scattered data by local thin plate splines. *Comp. Maths. Appls*, 8 : 273–281.
- GASPARI, G. et COHN, S. (1996). Construction of correlation functions in two and three dimensions.
- GELAS, A. et PROST, R. (2006). Multi-resolution reconstruction of irregularly sampled signals with compactly supported radial basis functions. In *IEEE Int. Conf. on Signal Processing (ICASSP)*, Toulouse, France, volume 3, pages 388–391.
- GIACHETTI, A., CAMPANI, M. et TORRE, V. (1998). The use of optical flow for road navigation. *IEEE trans. on Robotics and Automation*, 14(1) : 34–49.
- GOLUB, G., HEATH, M. et WAHBA, G. (1979). Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 21 : 215–223.
- GROSSSMANN, A. et MORLET, J. (1984). Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM*, 15 : 723–736.
- GU, C. (1989). Rkpack and its applications: fitting smoothing spline models. Rapport technique 857.
- GUICHARD, F. et RUDIN, L. (1996). Accurate estimation of discontinuous optical flow by minimizing divergence related functionals. In *ICIP*, volume 1, pages 497–500.
- GUPTA, S. et PRINCE, J. (1996a). Div-curl regularization for motion estimation in 3-d volumetric imaging. In *IEEE International Conf. on Image Proc. Lausanne, Switzerland*, pages 929–932.
- GUPTA, S. et PRINCE, J. (1996b). Stochastic models for div-curl optical flow methods.
- HARRIS, F. J. (1978). On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform. In *Proc. IEEE*, pages 51–83.
- HAUSSECKER, H. et FLEET, D. (2001). Computing optical flow with physical models of brightness variation. *PAMI*, 23(6) : 661–673.
- HAUSSECKER, H. W. (2000). Simultaneous estimation of optical flow and heat transport in infrared image sequences. In *CVBVS00: Proceedings of the IEEE Workshop on Computer Vision Beyond the Visible Spectrum: Methods and Applications (CVBVS 2000)*, page 85, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society.
- HEEGER, D. J. (1988). Optical flow using spatiotemporal filters. *International Journal of Computer Vision*, 1(4) : 279–302.
- HORN, B. et SCHUNCK, B. (1981). Determining optical flow. *AI*, 17(1-3) : 185–203.
- HYMAN, J., KNAPP, R. et SCOVEL, J. (1992). High order finite volume approximations of differential operators on nonuniform grids. *Physica D*, 60 : 112–138.
-

Bibliographie

- IRANI, M. et ANANDAN, P. (1998). Video indexing based on mosaic representation. *IEEE Trans. on PAMI, May 1998.*, 86(5) : 905–921.
- ISAMBERT, T. (2005). Estimation du mouvement fluide apparent dans un cadre de splines vectorielles. In *ORASIS*.
- ISKE, A. (2004). *Multiresolution Methods in Scattered Data Modelling*. SpringerVerlag.
- JONES, R. D., LEE, Y. C., BARNES, C. W., FLAKE, G. W., LEE, K., LEWIS, P. S. et QIAN, S. (1990). Function approximation and time series prediction with neural networks. In *International Joint Conference on Neural Networks*, volume 1, pages 649–665.
- KIMELDORF, G. et WAHBA, G. (1971). Some results on tchebycheffian spline functions. *Mathematical Analysis and Applications*, 33(1) : 82–95.
- KUMAR, A., TANNENBAUM, A. R. et BALAS, G. J. (1996). Optical flow: a curve evolution approach. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(4) : 598–610.
- LAURENT, P.-J. (1972). *Approximation et Optimisation*. Hermann.
- LEVY, M., GAVART, M., MEMERY, L., CANIAUX, G. et PACI, A. (2004). A 4D-mesoscale map of the spring bloom in the POMME experiment (Northeast Atlantic): results of a prognostic model. *Journal of Geophysical Research*.
- LORENCEAU, J. (2006). *Mécanismes de la perception visuelle du mouvement*. Notes de cours.
- LYCHE, T. et SCHUMAKER, L. L. (1975). Local spline approximation methods. *J. Approx. Theory*, 15 : 294–325.
- M-A. BROSSARD, N. Rougon, F. P. (1999). Estimation paramétrique robuste à support optimal de la structure d'écoulements fluides en imagerie météo-sat. In *Actes 17ème Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images*, Vannes, France, pages 339–342.
- MADEC, G., IMBARD, M. et LÉVY, C. (1999). *OPA 8.1 Ocean General Circulation Model Reference Manual*. Institut Pierre Simon Laplace, Paris. Notes scientifiques du pôle modélisation.
- MCQUEEN, J. (1967). Some methods for classification and analysis of multivariate observations. In *Proc. of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pages 281–297.
- MÉMIN, E. et PÉREZ, P. (1998). A multigrid approach to hierarchical motion estimation. In *Proc. Int. Conf. on Computer Vision, ICCV'98*, pages 933–938, Bombay, India.
- MÉMIN, E. et PÉREZ, P. (2002). Hierarchical estimation and segmentation of dense motion fields. *Int. Journal of Computer Vision*, 46(2) : 129–155.
- MICCHELLI, C. (1986). Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions. *Constr. Approx.*, 3 : 11–22.
- MÉMIN, E., PÉREZ, P. et MACHECOURT, D. (1996). Dense estimation and object-based segmentation of the optical flow with robust techniques. Rapport technique 991, IRISA.
- MONTOLIU, R. et PLA, F. (2001). Multiple parametric motion model estimation and segmentation. In *ICIP01*, volume 2, pages 933–936.
- MOROZOV, V. (1984). *Methods for solving incorrectly posed problems*. Springer, New York, USA.
- NAGEL, H.-H. (1987). On the estimation of optical flow: relations between different approaches and some new results. *Artif. Intell.*, 33(3) : 298–324.

- NAGEL, H. H. et ENKELMANN, W. (1986). An investigation of smoothness constraints for the estimation of displacement vector fields from image sequences. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 8(5) : 565–593.
- ODOBEZ, J. et BOUTHEMY, P. (1995). Robust multiresolution estimation of parametric motion models. *JVCIR*, 6(4) : 348–365.
- OPPENHEIM, A. V. et LIM, J. S. (1981). The importance of phase in signals. *IEEE Proceedings*, 69 : 529–541.
- ORR, M. J. L. (1996). Introduction to radial basis function networks. Rapport technique.
- OSMAN, N. F., KERWIN, W. S. et an J. L. PRINCE, E. R. M. (1999). Cardiac motion tracking using cine harmonic phase (harp) magnetic resonance imaging. *Mag. Res. Med*, 42 : 1048–1060.
- POWELL, M. J. D. (1992). The theory of radial basis function approximation in 1990. In LIGHT, W. A., éditeur : *Advances in Numerical Analysis: Wavelets, Subdivision Algorithms, and Radial Basis Functions*, volume 2, pages S. 105–210. Clarendon Press.
- PREPARATA, F. P. et SHAMOS, M. I. (1985). *Computational Geometry ; An Introduction*. Springer-Verlag.
- PRICE, J. (1984). Land surface temperature measurements from the split window channels of the noaa 7 advanced very high resolution radiometer. *Journal of Geophysics Research*, 89 : 7231–7237.
- RAKSHIT, S. et ANDERSON, C. (1997). Computation of optical-flow using basis functions. *IP*, 6(9) : 1246–1254.
- RANJAN, V. (1996). *A Union of Spheres Representation for 3D Objects*. Thèse de doctorat, UBC.
- RANJAN, V. et FOURNIER, A. (1994). Volume models for volumetric data. *IEEE Computer*, 27(7) : 28–36.
- RUHNAU, P., A., S. et SCHNÖRR, C. (2007). Variational estimation of experimental fluid flows with physics-based spatio-temporal regularization. *Measurement Science and Technology*, 18(3) : 755–763.
- RUHNAU, P., STAHL, A. et SCHNÖRR, C. (2006). On-line variational estimation of dynamical fluid flows with physics-based spatio-temporal regularization. In *DAGM-Symposium*, pages 444–454.
- SABBAH, C. (2000). *Théorème de Lefschetz "difficile" et théorie de Hodge*. Notes de cours.
- SCHABACK, R. (1995). Error estimates and condition numbers for radial basis function interpolation. *Advances in Computational Mathematics*, 3 : 251–264.
- SCHMETZ, J., HOLMLUND, K., HOFFMAN, J., STRAUSS, B., MASON, B., GAERTNER, V., KOCH, A. et VAN DE BERG, L. (1993). Operational Cloud-Motion Winds from Meteosat Infrared Images. *Journal of Applied Meteorology*, 32 : 1206–1225.
- SCHUNCK, B. (1984). The motion constraint equation for optical flow. In *ICPR84*, pages 20–22.
- SCHWARTZ, L. (1957). *Théorie des distributions*. Hermann, Paris, France.
- SERRA, J. (1982). *Image analysis and mathematical morphology*. Elsevier Academic Press.
- SRINIVASAN, S. et CHELLAPPA, R. (1999). Noise-resilient estimation of optical flow by use of overlapped basis functions. *JOSA-A*, 16(3) : 493–507.
- STEWART, R. (2002). *Introduction to Physical Oceanography*. Department of Oceanography, Texas A&M University.

Bibliographie

- SUTER, D. (1994). Motion estimation and vector splines. *In CVPR94*.
- SUTER, D. et CHEN, F. (2000). Left ventricular motion reconstruction based on elastic vector splines. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 19(4) : 295–305.
- SZELISKI, R. (1990). Fast surface interpolation using hierarchical basis functions. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 12(6) : 513–528.
- SZELISKI, R. (1996). Motion estimation with quadtree splines. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 18(12) : 1199–1210.
- SZELISKI, R. et COUGHLAN, J. (1997). Spline-based image registration. *Int. J. Comput. Vision*, 22(3) : 199–218.
- T. ZAHARIA, F. P. (2001). Parametric motion models for video content description within the mpeg-7 framework. *In Proceedings SPIE Conference 4304 on Nonlinear Image Processing and Pattern Analysis XII, San Jose, CA*, pages 118–132.
- TAM, R. (2003). *Voronoi Ball Models for Computational Shape Applications*. Thèse de doctorat, UBC.
- TATON, R. (1957). *Histoire générale des sciences*. P.U.F., 1957.
- TIKHONOV, A. (1963). The regularization of ill-posed problems. *Dokl. Akad. Nauk., SSR* 153(1) : 49–52.
- VIGAN, X., PROVOST, C., BLECK, R. et COURTIER, P. (2000). Sea surface velocities from Sea Surface Temperature image sequences. *Journal of Geophysical Research*.
- WAHBA, G. (1979). Ill-posed problems: Numerical and statistical methods for mildly moderately and severely ill-posed problems with noisy data. *In Proc. Intern. Conf. Ill-Posed Problems Newark*.
- WAHBA, G. (1990). *Spline Models for Observational Data*. Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- WAHBA, G. et WENDELBERGER, J. (1980). Some new mathematical methods for variational objective analysis using splines and cross validation. *Monthly Weather Review*, 108 : 1122–1143.
- WEBER, J. et MALIK, J. (1995). Robust computation of optical flow in a multi-scale differential framework. *International Journal of Computer Vision*, 14(1) : 5–19.
- WEICKERT, J. et SCHNÖRR, C. (2001). Variational optic flow computation with a spatio-temporal smoothness constraint. *J. Math. Imaging Vis.*, 14(3) : 245–255.
- WENDLAND, H. (1995). Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degree. *Advances in Computational Mathematics*, 4 : 389–396.
- WENDLAND, H. (2002). Fast evaluation of radial basis functions: Methods based on partition of unity. *Approximation Theory X: Abstract and Classical Analysis*, pages 473–483.
- WERTHEIMER, M. (1912). Experimentelle studien uber das sehen von beuegung. *Zeitschrift fuer Psychologie*, 61 : 161–265.
- WILDES, R. et AMABILE, M. (1997). Physically based fluid flow recovery from image sequences. *In CVPR97*, pages 969–975.
- WOICK, H. (1994). Verification of cloud motion winds. *Advances in Space Research*, 14 : 111–114.

- WU, Q. X. (1995). A correlation-relaxation-labeling framework for computing optical flow - template matching from a new perspective. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 17(9) : 843–853.
- WU, Z. M. et SCHABACK, R. (1993). Local error estimates for radial basis function interpolation of scattered data. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 13(1) : 13–27.
- YEE, P. V. et HAYKIN, S. (2001). *Regularized Radial Basis Function Networks: Theory and Applications*. Wiley-Interscience.
- YUAN, J., SCHNÖRR, C. et MÉMIN, E. (2007). Discrete orthogonal decomposition and variational fluid flow estimation. *Journ. of Mathematical Imaging and Vision*.
- ZEKI, S. (1994). *A vision of the brain*. Blackwell Sc. Pub. (Oxford).
- ZHOU, L., KAMBHAMETTU, C. et GOLDFOF, D. Fluid structure and motion analysis from multi-spectrum 2D cloud image sequences. *In CVPR00*, volume 2.

